

PHY6650A: Fondements Théoriques du Modèle Standard

David London

Université de Montréal

automne 2020

PDF: <http://www.lps.umontreal.ca/~london/london.html>

Information

Professeur : David London, 514-343-5836
london@lps.umontreal.ca

Horaire du cours : lundi, 9h00-10h30,
vendredi, 9h00-10h30.

Remarque : Ceci est un cours à distance, donné avec Zoom. Afin d'essayer de reproduire une salle de cours, je vous demanderais d'allumer votre webcam, si possible. Quand j'enseigne, j'essaie d'interagir avec les étudiants en posant plusieurs questions. J'espère que vous pourrez vous impliquer, même avec Zoom.

Évaluation : Devoirs (8) : 20%,
Intra : 30%,
Examen final : 50%.

Introduction

Cours: introduction aux théories de jauge et au modèle standard (MS).

La base: théorie des champs. Il y aura un chevauchement avec Théorie des Champs 1, mais j'essayerai de le minimiser (e.g., pour diagrammes et règles de Feynman, résultats dérivés avec moins de rigueur). Remarque: si un étudiant n'a pas suivi Théorie des Champs 1, il ne sera pas désavantagé!

À la fin du cours, l'étudiant saura calculer des processus dans le MS (e.g., la diffusion e^+e^- , la désintégration du Z^0 , etc.). De plus, on étudiera divers aspects du MS (e.g., violation CP, masses des neutrinos, etc.).

Je ne suivrai pas un seul livre. Bibliographie:

- *Quantum Field Theory*, F. Mandl & G. Shaw.
- *An Introduction to Quantum Field Theory*, M.E. Peskin & D.V. Schroeder:
<http://www.slac.stanford.edu/mpeskin/QFTseq.html>
- *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*,
C. Quigg: **<http://lutece.fnal.gov/GTSWEMI/>**
- *Gauge Theories in Particle Physics*, I.J.R. Aitchison & A.J.G. Hey.
- *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, T.-P. Cheng & L.-F. Li.
- *The Standard Model and Beyond, Second Edition*, Paul Langacker.

Survol du MS

Forces: les forces forte, électromagnétique, faible et gravitationnelle. La puissance des forces varie avec l'échelle d'énergie à laquelle les expériences sont faites. À basse énergie [$\lesssim 1 \text{ GeV}$ (m_{proton})], on a

$$\alpha_S : \alpha_{\text{em}} : \alpha_W : \alpha_{\text{grav}} = 1 : \frac{1}{137} : 10^{-6} : 10^{-39} .$$

\implies la gravité est complètement négligeable. (Je n'en parlerai plus.)

Forces dues à l'échange de particules de spin 1 ("bosons de jauge") qui couplent à certaines "charges".

- la force électromagnétique: échange de photons qui ressentent la charge électromagnétique.
- la force forte: échange de "gluons" qui couplent à **la couleur**.
- la force faible: échange des W et Z qui couplent à **l'isospin faible**.

Charges \implies groupes de Lie.

Groupes

Définition d'un groupe:

Un groupe G est un ensemble d'éléments $\{a, b, \dots\}$ avec une opération appelée le produit du groupe, écrite $a \cdot b$, obéissant aux quatre propriétés suivantes:

- 1 Fermeture. $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$.
- 2 Associativité. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- 3 Identité. \exists un élément $e \in G$, qu'on appelle l'identité, pour lequel $e \cdot a = a \cdot e = a \forall a \in G$.
- 4 Inverse. Chaque élément $a \in G$ a un inverse, écrit $a^{-1} \in G$, pour lequel $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

L'ordre du groupe est le nombre d'éléments dans l'ensemble.

L'ordre peut être fini (groupe fini), infini et dénombrable (groupe infini discret), infini et non dénombrable (groupe continu).

Définition:

Un groupe est *abélien* (ou commutatif) si $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in G$. Un groupe est *non-abélien* (ou non commutatif) si $a \cdot b \neq b \cdot a$ pour au moins une paire d'éléments $a, b \in G$.

Groupes de Lie

Groupes de Lie: continus, un groupe de Lie peut être abélien ou non-abélien.

Exemple: matrices 2×2 , déterminant 1, unitaire. Elles forment un groupe, $SU(2)$. Il y a un nombre infini de telles matrices (éléments du groupe).

Une telle matrice M :

$$M = e^{iA},$$

où $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$

(i) $M^\dagger = e^{-iA^\dagger}$. $MM^\dagger = M^\dagger M = I$. Question: la condition d'unitarité, qu'est-ce qu'elle implique pour A ? Réponse: $A = A^\dagger$, c.-à-d., A est hermitien.

(ii) On peut appliquer une transformation unitaire afin de diagonaliser M et A . Dans ce cas

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iA_{11}} & 0 \\ 0 & e^{iA_{22}} \end{pmatrix}.$$

Or, $\text{Det}(M) = M_{11}M_{22} = e^{iA_{11}}e^{iA_{22}} = 1$. Question: cette condition, qu'est-ce qu'elle implique pour A ? Réponse: $A_{11} + A_{22} = 0$, c.-à-d., $\text{Tr}(A) = 0$.

Donc, A est hermitien et de trace nulle.

Question: si on écrit $A = \sum_j \alpha_j T_j$, où les α_j sont des coefficients réels et les T_j sont les matrices de base, quelles sont les T_j ?

∃ 3 matrices 2×2 qui sont hermitiennes et sans trace: les matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

N'importe quelle matrice M peut être écrite en fonction des σ_i . Les $\frac{1}{2}\sigma_i$ sont les **générateurs** de $SU(2)$.

Générale: prenons n'importe quel groupe de Lie G . Pour les transformations infinitésimales (les éléments près de l'identité), G peut être défini en terme de son *algèbre*, qui consiste des générateurs de G et leurs relations de commutation.

L'algèbre du groupe $SU(2)$ est $su(2)$. Les $\frac{1}{2}\sigma_i$: mêmes relations de commutation que celles des \vec{L} : $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \implies$ générateurs de $SU(2)$ satisfont à

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k.$$

C'est la **définition** de l'algèbre $su(2)$.

Désormais, on laisse tomber la nécessité d'avoir des matrices 2×2 . Tant que les matrices J_i satisfont à $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$, elles peuvent avoir n'importe quelle dimension. Ce sont différentes *représentations* de $su(2)$.

Moment angulaire $\equiv SU(2)$: \exists singulets, doublets, triplets, etc., qui sont des représentations différentes. On peut combiner des représentations, e.g., $2 \otimes 2 = 1 \oplus 3$ (coefficients de Clebsch-Gordan).

Question: comment trouve-t-on les générateurs pour une représentation donnée?
Réponse: rappel, mécanique quantique. Pour une représentation de dimension j , il y a $2j + 1$ états propres: $|j, m\rangle$, avec $m = j, j - 1, \dots, -j$. Les générateurs sont les J_i , avec $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. L'action des J_i sur les états $|j, m\rangle$ est

$$\begin{aligned} J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle , \\ J_+ |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle , \\ J_- |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle , \end{aligned}$$

avec

$$J_+ \equiv J_1 + iJ_2 , \quad J_- \equiv J_1 - iJ_2 .$$

Exemple: $j = \frac{1}{2}$. Les états sont $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ et $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$, avec

$$\begin{aligned} J_3 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, & J_3 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle &= -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \\ J_+ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= 0, & J_+ \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \\ J_- \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, & J_- \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & J_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & J_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow J_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & J_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Parenthèse: le moment angulaire orbital, \vec{L} , est aussi un moment angulaire. Mais il est relié aux rotations en trois dimensions, qui sont décrites par le groupe orthogonal $SO(3)$. Les générateurs de $SO(3)$ sont les \vec{L} , qui satisfont à

$$[L^i, L^j] = i\epsilon_{ijk}L^k .$$

(On reverra ceci un peu plus tard.)

Donc les algèbres $su(2)$ et $so(3)$ sont isomorphes. Fin parenthèse.

Interactions faibles: groupe $SU(2)$. (Remarque: \exists 3 générateurs et 3 bosons de jauge W^\pm, Z^0 . Pas une coïncidence.) Particules placées dans différentes représentations de $SU(2)$. Le I_3 , ou *isospin faible* est la charge à laquelle les bosons de jauge faibles couplent.

Interactions fortes: groupe $SU(3)$. 8 générateurs (8 gluons). Toutes les représentations ne sont pas permises. La plus petite (non-triviale) est le **3**. (Autres: **6**, **8**, **10**, etc. On peut les combiner avec les coefficients de Clebsch-Gordan pour $SU(3)$.) Quarks: ressentent la force forte, se trouvent dans un **3** de $SU(3)$ \implies il y a 3 *couleurs*. C'est la charge à laquelle les gluons couplent.

Électromagnétisme: groupe $U(1)$. 1 générateur (le photon). La charge à laquelle le photon couple est la charge électromagnétique: pas quantifié, par opposition à $SU(2)$ et à $SU(3)$.

Particules du MS

Deux types: celles qui ressentent la force forte (quarks) et celles qui ne la ressentent pas (leptons). Toutes viennent en trois *familles*.

Leptons:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L, \quad e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R.$$

Neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) neutres ($Q_{em} = 0$); e^-, μ^- et τ^- ont $Q_{em} = -1$.

Remarque: fermions ont deux états de spin. Indice L (R): spin antiparallèle (parallèle) à la direction du mouvement. C'est l'*hélicité* de la particule.

Remarque: les fermions chargés ont des composantes L et R . Dû au fait que ces particules ont une masse. (On peut changer $L \leftrightarrow R$ à l'aide d'une transformation de Lorentz.)

Mais neutrinos n'ont qu'une composante: $L \implies$ neutrinos sans masse!? Nous savons maintenant que les neutrinos possèdent une masse. Mais cette masse peut être générée avec une seule composante, L (masse de Majorana). Nous ne savons pas encore si la masse de neutrino est une masse de Majorana. Donc la liste de fermions pourrait ne pas être complète.

Composantes L de fermions: doublets sous $SU(2)$; composantes R : singulets sous $SU(2)$. Ceci implique que c'est seulement les composantes L des fermions qui ressentent la force faible. On peut transformer un fermion avec $I_3 = -1/2$ en un fermion avec $I_3 = +1/2$ (et vice-versa) par l'échange d'un W^\pm (avec $I_3 = 1$).

Nous ne connaissons pas les masses des neutrinos (mais nous savons qu'ils sont très légers: $m_\nu < 1$ eV). Les masses des leptons chargés sont

$$m_e = 0.511 \text{ MeV} , \quad m_\mu = 106 \text{ MeV} , \quad m_\tau = 1.78 \text{ GeV} .$$

Quarks: il y a 6 types:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R.$$

Les quarks avec $I_3 = +1/2$ [u (up), c (charm), t (top)] ont $Q_{em} = 2/3$. Les quarks avec $I_3 = -1/2$ [d (down), s (strange), b (bottom)] ont $Q_{em} = -1/3$. Tous les quarks ont trois couleurs et ressentent la force forte.

Nous ne savons qu'approximativement les masses des quarks (confinement):

$$\begin{aligned} m_u &= 2.3^{+0.7}_{-0.5} \text{ MeV}, & m_d &= 4.8^{+0.5}_{-0.3} \text{ MeV}, & m_s &= 95 \pm 5 \text{ MeV}, \\ m_c &= 1.275 \pm 0.025 \text{ GeV}, & m_b &= 4.18 \pm 0.03 \text{ GeV}, \\ m_t &= 173.07 \pm 0.52 \pm 0.72 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Bosons de jauge (spin 1): photon et gluons sont neutres et sans masse. Le W : $M_W = 80.4 \text{ GeV}$, $Q_{em} = \pm 1$; le Z : neutre, $M_Z = 91.2 \text{ GeV}$.

Le MS prédit l'existence du boson de Higgs: spin 0, sans couleur, doublet de $SU(2)$. Le boson de Higgs est responsable de la brisure de symétrie. Découvert en 2012, avec masse 125 GeV.

Conventions

- $\hbar = c = 1 \implies E, p, m, \frac{1}{x}, \frac{1}{t}$ ont tous l'unité d'énergie.

Métrique:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

4-vecteurs:

- contravariant: $a^\mu \equiv (a^0; a^1, a^2, a^3)$.
- covariant: $b_\mu = g_{\mu\nu} b^\nu$.
- Produit scalaire: $a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$. (La forme est due au choix de la métrique.)

4-vecteurs:

$$x^\mu = (ct; \vec{r}) \text{ espace-temps ,}$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}; \vec{p} \right) \text{ énergie-impulsion ,}$$

$$A^\mu = (\phi; \vec{A}) \text{ potentiel électromagnétique ,}$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; -\vec{\nabla} \right) \text{ gradient .}$$

Remarque: MQ: $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$.

Rappel:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 .$$

Transformations de Lorentz

Transformations de Lorentz:

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} .$$

Produits scalaires préservés:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} a'^{\mu} a'^{\nu} &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} a^{\alpha} a^{\beta} = g_{\alpha\beta} a^{\alpha} a^{\beta} \\ \implies g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} &= g_{\alpha\beta} . \end{aligned}$$

Deux types: rotations et “boosts” (changements de référentiel).

Rotations: laissent a^0 inchangé:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} .$$

R est une matrice 3×3 , orthogonale ($R^T R = 1$), de déterminant 1 \implies rotations sont des membres de $SO(3)$:

$$R = \exp\left(-i\hat{n} \cdot \vec{J}\theta\right) .$$

θ est l'angle de rotation autour de \hat{n} , les \vec{J} sont les générateurs de $SO(3)$.

R est réel $\implies J$: purement imaginaire. Aussi, hermitien et de trace nulle:

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

i.e., $(J^i)_{mn} = -i\epsilon_{imn}$. Ils satisfont à

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k .$$

Rotation infinitesimale:

$$\begin{aligned}x'^j &= R^j_i x^i \simeq \left(1 - i \hat{n} \cdot \vec{J} \theta\right)^j_i x^i = x^j - i \left(\hat{n} \cdot \vec{J} \theta x\right)^j \\ &= \vec{x} + \theta \hat{n} \times \vec{x}.\end{aligned}$$

Boosts: on peut générer un boost selon n'importe quel axe n^i avec un boost selon \hat{z} , avec une rotation: $B(\hat{n}) = R_{\hat{z} \rightarrow \hat{n}} B(z) R_{\hat{z} \rightarrow \hat{n}}^{-1} \implies$ il suffit de considérer $B(z)$.

Transformation de Lorentz: rappel (relativité):

$$\begin{aligned}ct' &= \gamma(ct + \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z + \beta ct),\end{aligned}$$

où $\beta \equiv v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Or, $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1 \implies$ Définir

$$\cosh \chi \equiv \gamma, \quad \sinh \chi \equiv \beta \gamma.$$

Donc

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & \sinh \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{pmatrix} .$$

On écrit $B(z) = \exp(K_z \chi)$, où $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$. On prend

$$K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies K_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Mais $K_z^3 = K_z^5 = K_z^{\text{impair}} = K_z$ et $K_z^4 = K_z^6 = K_z^{\text{pair}} = K_z^2$.

$$\implies \exp(K_z \chi) = 1 + K_z(\chi + \frac{1}{3!}\chi^3 + \frac{1}{5!}\chi^5 + \dots) + K_z^2(\frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{4!}\chi^4 + \frac{1}{6!}\chi^6 + \dots).$$

Donc

$$\text{éléments } 00, 33 : 1 + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{4!}\chi^4 + \dots = \cosh \chi ,$$

$$\text{éléments } 11, 22 : 1 ,$$

$$\text{éléments } 03, 30 : \chi + \frac{1}{3!}\chi^3 + \frac{1}{5!}\chi^5 + \dots = \sinh \chi .$$

On peut généraliser: $B(\hat{n}) = \exp(\hat{n} \cdot \vec{K}_\chi)$, où

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les K^i sont les générateurs des boosts.

Relations de commutation:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk} J^k, \quad [K^i, K^j] = i\epsilon_{ijk} J^k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk} K^k.$$

Remarque: on peut combiner les générateurs:

$$M_i \equiv \frac{1}{2}(J^i + K^i), \quad N_i \equiv \frac{1}{2}(J^i - K^i),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} [M^i, M^j] &= i\epsilon_{ijk} M^k, \\ [N^i, N^j] &= i\epsilon_{ijk} N^k, \\ [M^i, N^j] &= 0. \end{aligned}$$

\implies transformations de Lorentz forment un groupe: $SU(2) \times SU(2)$.

Mécanique Quantique Relativiste

L'équation de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi .$$

Deux dérivées par rapport à l'espace, une par rapport au temps \implies pas invariant de Lorentz.

La relation énergie-impulsion-masse:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 .$$

$p^\mu = i\hbar \partial^\mu \implies$ l'équation de Klein-Gordon (KG):

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0 , \quad \text{ou} \quad [\square + m^2] \phi = 0 ,$$

où $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ (le d'alembertien).

Problème:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} .$$

∃ solutions avec $E < 0$. Elles n'ont pas de sens pour une particule libre.

Solution éventuelle: théorie des champs (solutions d'énergie négative correspondent aux antiparticules). Cependant: on suit l'approche historique et abandonne (temporairement) l'équation KG.

L'équation de Dirac

Essaie: équation linéaire en dérivées $\partial/\partial x^i$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi ,$$

où

$$H = -i\hbar c \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \beta mc^2 .$$

α_j et β sont des constantes. L'équation de Dirac.

Demande que l'équation reproduise $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. On calcul le carré de l'équation:

$$(\alpha_j p_j c + \beta mc^2) (\alpha_j p_j c + \beta mc^2) \psi = E^2 \psi .$$

Alors

$$E^2 = \alpha_i \alpha_j p_i p_j c^2 + 2\beta mc^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^4 .$$

Problème: afin d'éliminer le term croisé, il faut $\beta = 0$ ou $\alpha_i = 0 \forall i$, ce qui élimine aussi un des autres termes.

Solution: α_i et β sont des matrices hermitiennes:

$$E^2 = \alpha_i \alpha_j p_i p_j c^2 + (\beta \alpha_i + \alpha_i \beta) m c^3 p_i + \beta^2 m^2 c^4 .$$

Premier terme:

$$\alpha_i \alpha_j p_i p_j = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_j \alpha_i p_j p_i) .$$

Dans le deuxième terme, on change les noms des indices: $i \leftrightarrow j$. Ça donne

$$\alpha_i \alpha_j p_i p_j = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_j \alpha_i p_j p_i) .$$

Mais $p_{i,j}$ sont des chiffres $\implies p_j p_i = p_i p_j$. Alors,

$$E^2 = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j c^2 + (\beta \alpha_i + \alpha_i \beta) m c^3 p_i + \beta^2 m^2 c^4 .$$

Afin de reproduire $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. on demande alors que

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} , \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 , \quad \beta^2 = I .$$

Nous avons

$$\text{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = \text{Tr}(\beta^2\alpha_i) = \text{Tr}(\alpha_i) .$$

Mais $\{\alpha_i, \beta\} = 0 \implies$

$$\text{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = -\text{Tr}(\beta\beta\alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i) .$$

$\therefore \text{Tr}(\alpha_i) = 0 \implies$ dimension des matrices paire. Dimension minimale: 4, e.g.,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} , \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(Ce n'est qu'une représentation des matrices.)

Une autre forme de l'éq. de Dirac:

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2) \psi &= E\psi \\ \frac{\beta}{c} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2) \psi &= \frac{\beta}{c} E\psi \\ \rightarrow \beta \frac{E}{c} \psi - \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi - mc\psi &= 0.\end{aligned}$$

Définir

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0; \gamma^i), \quad \text{avec } \gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i.$$

\Rightarrow

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) \psi = 0 \quad \equiv \quad (\not{p} - m) \psi = 0.$$

C'est la forme la plus commune de l'éq. de Dirac.

Matrices γ

β et α_i hermitiens \implies

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 ,$$

mais

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger\beta^\dagger = \alpha_i\beta = -\beta\alpha_i = -\gamma^i .$$

On peut combiner ces relations:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad [\gamma^{0\dagger} = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 , \quad \gamma^{i\dagger} = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i] .$$

Aussi,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} .$$

Avec la représentation précédente pour β et α_i , nous avons

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} .$$

\exists d'autres représentations \implies attention!

Solution: Particule Libre

ψ : 4 composantes. On peut l'écrire en fonction de deux spineurs à 2 composantes:

$$\psi = \eta \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \end{bmatrix} .$$

(η : normalisation)

Éq. de Dirac: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2) \psi = E\psi$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \end{bmatrix} .$$

\implies équations pour chaque spineur:

$$\text{en haut :} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \xi + m \phi = E \phi ,$$

$$\text{en bas :} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi - m \xi = E \xi .$$

Deuxième équation:

$$\xi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \phi .$$

Insérer dans première équation, utiliser $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$ [devoir #1] \implies

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{E + m} + m \right) \phi = E \phi .$$

On peut résoudre pour l'énergie:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} .$$

\therefore même l'équation de Dirac à des solutions avec $E < 0$!?

Les solutions pour énergie positive et négative sont

$$\psi = \eta \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi \end{bmatrix} \text{ pour } E > 0, \quad \psi = \eta \begin{bmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \xi \\ \xi \end{bmatrix} \text{ pour } E < 0.$$

Au repos, elles sont

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } E > 0, \quad \psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix} \text{ pour } E < 0.$$

Remarque: on aurait pu s'attendre à des solutions avec $E < 0$:

$$\begin{aligned}(-i\not{\partial} - m)(i\not{\partial} - m)\psi &= (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi \\ &= \left(\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right) \psi \\ &= (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \psi \\ &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0 .\end{aligned}$$

Donc, si ψ est une solution de l'équation de Dirac, il vérifie aussi l'équation KG.

On peut construire une interprétation artificielle des solutions avec $E < 0$ (théorie des trous). Mais la vraie résolution est de passer d'une théorie décrivant une particule (MQ) à une théorie à plusieurs particules (théorie des champs). On fera ça plus tard. D'ici là, on peut continuer à étudier l'équation de Dirac.

Covariants de Dirac

Théorie des champs \implies Lagrangiens invariants (singulets) sous des transformations de Lorentz. Quelle(s) combinaison(s) des ψ forme un scalaire de Lorentz?

Un spineur de Dirac ($E > 0$) au repos:

$$\psi(0) = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Boost:

$$\psi(p) = S_{\text{boost}}(p)\psi(0) = \eta \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi \end{bmatrix} .$$

Quelle est la forme de $S_{\text{boost}}(p)$?

$$S_{\text{boost}}(p) = \begin{bmatrix} \eta & \dots \\ \eta \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} & \dots \end{bmatrix} .$$

Autre condition: $S_{\text{boost}}^{-1}(\mathbf{p}) = S_{\text{boost}}(-\mathbf{p})$. Solution:

$$S_{\text{boost}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} & \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \end{bmatrix}$$

$\cosh \chi = \gamma = E/m \implies$

$$\cosh \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh \chi + 1)} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}},$$
$$\sinh \frac{\chi}{2} = \sqrt{\cosh^2 \frac{\chi}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} = \frac{p}{\sqrt{2m(E+m)}}.$$

\therefore

$$S_{\text{boost}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\chi}{2} & \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\chi}{2} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\chi}{2} & \cosh \frac{\chi}{2} \end{bmatrix}$$

Rappel:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij},$$

ce qui implique

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{n})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut écrire

$$S_{\text{boost}}(\rho) = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\chi}{2} & \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\chi}{2} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\chi}{2} & \cosh \frac{\chi}{2} \end{bmatrix} = \exp \left[\vec{\alpha} \cdot \hat{n} \frac{\chi}{2} \right].$$

Boost: $B(\hat{n}) = \exp(\hat{n} \cdot \vec{K} \chi) \implies$

$$\vec{K} \leftrightarrow \frac{\vec{\alpha}}{2}.$$

Maintenant: rotations. Nous avons

$$[K^i, K^j] = i\epsilon_{ijk}J^k .$$

On peut montrer que

$$\left[\frac{\alpha^i}{2}, \frac{\alpha^j}{2} \right] = \frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\Sigma^k , \quad \text{où } \Sigma^i = \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} .$$

Rotations:

$$S_{\text{rot}} = \exp \left[-i\hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2} \right] \quad \Longrightarrow \quad \vec{J} \leftrightarrow \frac{\vec{\Sigma}}{2} .$$

Scalaire de Lorentz: essayer $\psi^\dagger\psi$. Est-ce invariant sous des transformations de Lorentz?

Rotations:

$$\psi \rightarrow \exp\left(-i\hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2}\right) \psi, \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger \exp\left(+i\hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2}\right),$$

par ce que $\vec{\Sigma}$ est hermitien. Donc $\psi^\dagger\psi$ est invariant sous des rotations.

Boosts:

$$\psi \rightarrow \exp\left(\hat{n} \cdot \vec{\alpha} \frac{\chi}{2}\right) \psi, \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger \exp\left(\hat{n} \cdot \vec{\alpha} \frac{\chi}{2}\right).$$

Alors, sous des boosts, $\psi^\dagger\psi \rightarrow \psi^\dagger [\exp(\hat{n} \cdot \vec{\alpha}\chi)] \psi \implies$ pas bon!

Définir $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger A$, choisir A tel que $\bar{\psi}\psi$ est invariant sous des transformations de Lorentz.

Rotations: il faut

$$\psi^\dagger \exp\left(+i\hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2}\right) A \exp\left(-i\hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2}\right) \psi = \psi^\dagger A \psi \implies [A, \vec{\Sigma}] = 0.$$

Boosts: il faut

$$\psi^\dagger \exp\left(\hat{n} \cdot \vec{\alpha} \frac{\chi}{2}\right) A \exp\left(\hat{n} \cdot \vec{\alpha} \frac{\chi}{2}\right) \psi = \psi^\dagger A \psi \implies \{A, \vec{\alpha}\} = 0.$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \gamma_0 = \gamma^0.$$

Définir l'adjoint de Dirac:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0.$$

et

$$\bar{\psi}\psi$$

est un scalaire de Lorentz.

Autre covariants de Dirac: $\bar{\psi}\Gamma\psi$; Γ est une matrice 4×4 . \exists 16 Γ s. Que sont-ils?

Introduire une nouvelle matrice γ , γ_5 :

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0.$$

Remarque: on peut écrire $\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$, où $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est un tenseur complètement antisymétrique avec $\epsilon_{0123} = -1$.

Les 16 matrices indépendantes sont

$$1 \text{ (1)}, \quad \gamma_5 \text{ (1)}, \quad \gamma^\mu \text{ (4)}, \quad \gamma^\mu\gamma_5 \text{ (4)}, \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \text{ (6)}.$$

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ est un 4-vecteur (Théorie des Champs 1): si

$$\psi' = S\psi \implies \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi,$$

où S est une transformation de Lorentz.

Et $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$?

Rappel:

$$S_{\text{boost}}(\rho) = \exp\left[\vec{\alpha} \cdot \hat{n} \frac{\chi}{2}\right], \quad S_{\text{rot}} = \exp\left[-i\hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2}\right].$$

Mais

$$[\vec{\alpha}, \gamma_5] = 0, \quad [\vec{\Sigma}, \gamma_5] = 0.$$

$\therefore \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ se comporte sous une transformation de Lorentz comme si le γ_5 n'est pas là:

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma_5\psi' = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\psi.$$

Donc, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ est aussi un 4-vecteur? Pas exactement.

∃ autres transformations. e.g., parité P (inversion de l'espace). Sous P, les rotations ne changent pas de signe, mais les boosts changent de signe:

$$P \vec{\Sigma} P^{-1} = \vec{\Sigma}, \quad P \vec{\alpha} P^{-1} = -\vec{\alpha}.$$

La matrice qui commute avec $\vec{\Sigma}$ et anticommute avec $\vec{\alpha}$ est β :

$$P = \gamma^0 = \beta = P^{-1}.$$

Sous P,

$$P \gamma^\mu P^{-1} = \begin{cases} +\gamma^\mu & \mu = 0, \\ -\gamma^\mu & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}.$$

Les composantes spatiales changent de signe, mais pas la composante temporelle, ce qui est typique d'un 4-vecteur.

Mais pour l'opérateur $\gamma^\mu \gamma_5$, sous P

$$P\gamma^\mu\gamma_5P^{-1} = \begin{cases} -\gamma^\mu\gamma_5 & \mu = 0, \\ +\gamma^\mu\gamma_5 & \mu = 1, 2, 3 \end{cases} .$$

C'est-à-dire: à cause du γ_5 , c'est la composante temporelle qui change de signe; les composantes spatiales ne changent pas sous P $\implies \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ est un vecteur *axial*.

Les 16 covariants de Dirac sont:

$\bar{\psi}\psi$	scalaire ,
$\bar{\psi}\gamma_5\psi$	pseudoscalaire ,
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	vecteur ,
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$	pseudovecteur ,
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	tenseur .

Spineurs de Dirac

On peut écrire $\psi(x)$ en fonction des ondes planes:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x} ,$$

où $u(p)$ est un spineur avec $E > 0$ satisfaisant à

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 .$$

La normalisation de $u(p)$ est (pas de dérivation)

$$u(p) = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \phi \end{bmatrix} ,$$

\Rightarrow

$$\bar{u}(p)u(p) = 2m ,$$

avec $\phi^\dagger \phi = 1$.

Attention: cette normalisation est une convention. D'autres livres (e.g., Mandl & Shaw) peuvent utiliser une normalisation différente.

Pour la solution avec $E < 0$,

$$\psi(x) = v(p)e^{ip \cdot x} .$$

où $v(p)$ est un spineur satisfaisant à

$$(\not{p} + m)v(p) = 0 .$$

Même normalisation que pour $u(p)$:

$$v(p) = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \xi \\ \xi \end{bmatrix} ,$$

avec $\xi^\dagger \xi = 1$. Ceci donne $\bar{v}(p)v(p) = -2m$.

Hélicité et Chiralité

Rotations:

$$S_{\text{rot}} = \exp \left[-i \hat{n} \cdot \vec{\Sigma} \frac{\theta}{2} \right] , \quad \Sigma^i = \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} .$$

Spineurs $\phi [u(p)]$ et $\xi [v(p)]$ sont des états propres de $S_{\text{rot}} \implies$ états de spin.

e.g., $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: particule avec spin + dans la direction \hat{z} .

On considère la limite où l'énergie $\rightarrow \infty$, i.e., $E \gg m$:

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \simeq \vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \sigma_z [\hat{p} = \hat{z}] .$$

$E > 0$:

$$u(p) \simeq \sqrt{E} \begin{bmatrix} \phi \\ \sigma_z \phi \end{bmatrix} .$$

Ceci correspond à deux états:

$$u(p)^+ = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} , \quad u(p)^- = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} .$$

Remarque: $u(p)^+$ a $\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = +\frac{1}{2} \implies$ le spin est parallèle à la direction du mouvement, c'est un état droit (RH). Également, $u(p)^-$ a $\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = -\frac{1}{2} \implies$ le spin est antiparallèle à la direction du mouvement, c'est un état gauche (LH).

Précision: $u(p)^+$ et $u(p)^-$ sont définis dans la limite $E \gg m \implies$ ils sont des états d'hélicité R et L. Par contre, les états avec $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les états de chiralité R et L. Ils sont bien définis peu importe la valeur de \vec{p} (même $p = 0$). Donc, n'importe quel fermion massif a deux états de chiralité.

On considère l'opérateur

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Question: quels sont les valeurs et vecteurs propres de $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Réponse: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (valeur propre 1) et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (valeur propre 0). Et

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$? Réponse: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (valeur propre 0) et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (valeur propre 1).

Donc, $u(p)^+$ et $u(p)^-$ sont des états propres de $(1 + \gamma^5)/2$ et $(1 - \gamma^5)/2$, mais $u(p)^-$ est annihilé par $(1 + \gamma^5)/2$ et $u(p)^+$ est annihilé par $(1 - \gamma^5)/2$.

Interpretation: $P_R \equiv (1 + \gamma^5)/2$ et $P_L \equiv (1 - \gamma^5)/2$ sont des *opérateurs de projection* des états RH et LH, respectivement. Ils annihilent les états LH et RH, respectivement. Remarque: $P_R + P_L = 1$, $P_R^2 = P_R$, $P_L^2 = P_L$ et $P_R P_L = 0$, ce qui est typique des opérateurs de projection.

$E < 0$:

$$v(p) \simeq \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\sigma_z \xi \\ \xi \end{bmatrix}$$

Deux états:

$$v(p)^+ = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad v(p)^- = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Ici, $v(p)^+$ et $v(p)^-$ sont des états d'hélicité LH et RH, respectivement.

Attention: les états LH/RH sont inversés par rapport aux états de $u(p)$.

Important: on ne peut pas changer par un boost l'hélicité d'une particule sans masse. Expérimentalement, on trouve que les particules sans masse sont LH (pas d'état RH). Également les antiparticules sans masse sont RH.

Sommes sur le Spin

Nous avons

$$\sum_s u(p, s) u^\dagger(p, s) = (E + m) \sum_s \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_s^\dagger & \phi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} .$$

On utilise le fait que $\sum_s \phi_s \phi_s^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_s u(p, s) u^\dagger(p, s) &= (E + m) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} & \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & \frac{\vec{p}^2}{E+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & E - m \end{pmatrix} \\ &= E + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta \\ &= (E\beta - \beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m)\beta = (\not{p} + m)\beta \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = (\not{p} + m) .$$

Également

$$\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = (\not{p} - m) .$$

Théorie Classique des Champs

N particules ponctuelles en 1^D : positions x_1, x_2, \dots, x_N et masses m_1, m_2, \dots, m_N .
L'énergie potentielle est $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$ et l'énergie cinétique est

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 .$$

Pour chaque particule, le Lagrangien est

$$L(\dot{x}_i, x_i) \equiv T(\dot{x}_i) - V(x_i) .$$

À $t = 0$, le système est dans $x_i = a_i$; à $t = T$, il est dans $x_i = b_i$. Entre $t = 0$ and $t = T$, le système évoluera selon un chemin: $x_i = X_i(t)$, où $X_i(t)$ est déterminé par les équations du mouvement. Cependant, \exists plusieurs chemins. À chaque chemin, on associe l'action:

$$A = \int_0^T dt L(\dot{x}_i, x_i) .$$

On considère un chemin entre a_i et b_i : $x_i(t) = X_i(t) + \epsilon \xi_i(t)$, où ϵ est petit et $\xi_i(0) = \xi_i(T) = 0$. L'action complète est

$$A = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N L(\dot{x}_i, x_i) .$$

On demande que $\delta A = 0 \forall$ variations $\xi_j(t)$. Ceci implique que

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 .$$

Ce sont les équations du mouvement. Donc: le chemin physique est le point stationnaire de l'action, ce qui donne les équations du mouvement. C'est le principe de moindre action d'Hamilton.

Théorie classique des champs: on passe d'un système discret à un système continu \implies on introduit la variable $\phi = \phi(x, t)$ qui dépend de façon continue de la variable de distance x et le temps t . Ici, $\phi(x, t)$ est un *champ* prenant des valeurs différentes à chaque point dans l'espace-temps.

En passant des variables discrètes aux variables continues, on introduit une intégrale sur la direction spatiale: $\sum_i \rightarrow \int d^3x \implies$

$$L = \int d^3x \mathcal{L} .$$

\mathcal{L} est maintenant une *densité* Lagrangienne.

En 3^D , l'action est

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x ,$$

où \mathcal{L} est la *densité* Lagrangienne (qu'on appelle le Lagrangien).

Principe de moindre actions: $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right\} .\end{aligned}$$

Deuxième terme: dérivée totale \implies laisser tomber.

Donc la contrainte que $\delta S = 0 \forall \delta \phi \implies$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 .$$

Ce sont les équations du mouvement pour le champ.

Remarque: ces équations sont invariantes de Lorentz si le Lagrangien se transforme comme un scalaire de Lorentz.

Formalisme d'Hamilton

Hamilton: système discret: pour chaque variable q , on définit

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H \equiv \sum p\dot{q} - L,$$

où p est l'impulsion conjuguée (pas nécessairement la vraie impulsion).

Système continu:

$$p(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \pi(x) d^3x, \quad \text{où } \pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}.$$

i.e., $\pi(x)$ est la densité d'impulsion, conjuguée à $\phi(x)$.

On définit

$$H = \int d^3x \left[\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right] \equiv \int d^3x \mathcal{H},$$

où \mathcal{H} est la *densité* Hamiltonienne.

Théorème de Noether

On considère une transformation des champs ϕ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) ,$$

où α est un paramètre infinitesimal.

Cette transformation est une *symétrie* si elle laisse invariante les équations du mouvement. Ceci est assuré si l'action est invariante, i.e., si le Lagrangien change par au plus une dérivée totale:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu J^\mu(x) .$$

On peut calculer $J^\mu(x)$ à partir de la transformation du champs et du Lagrangien.

On applique la transformation $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$:

$$\begin{aligned}\alpha\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\phi) \\ &= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\Delta\phi.\end{aligned}$$

Le deuxième terme = 0 (équations du mouvement).

On a donc

$$\alpha\partial_\mu J^\mu(x) = \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right),$$

ou

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - J^\mu(x)\right) = 0.$$

Alors

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - J^\mu(x),$$

i.e., il y a un courant conservé. Donc: une symétrie du Lagrangian implique un courant conservé. C'est le théorème de Noether.

Il y a une charge conservée associée à ce courant conservé:

$$Q = \int_{\text{tout l'espace}} j^0 d^3x$$

est une constante dans le temps.

Questions: en mécanique classique, quelles sont les quantités qui sont conservées?
Pour chaque quantité, quelle est la symétrie y associée?

Théorie Quantique des Champs

Il faut quantifier la théorie. MQ:

$$x(t) \rightarrow \hat{x} , \quad p(t) \rightarrow \hat{p} \quad \text{avec} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar .$$

(Ceci est la représentation de Schroedinger: les opérateurs sont indépendants du temps. Plus tard, on utilisera la représentation de Heisenberg.)

Théorie des champs: similaire. $\phi(x)$ et $\pi(x)$ deviennent des opérateurs et il faut aussi imposer des relations de commutation. Système discret:

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} , \quad [q_i, q_j] = 0 , \quad [p_i, p_j] = 0 .$$

Système continu: $\pi(x)$ est une *densité* d'impulsion \implies il faut une fonction δ de Dirac au lieu d'une fonction δ de Kronecker:

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) , \quad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0 , \quad [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 .$$

L'Hamiltonien (fonction de $\phi(x)$ et $\pi(x)$) est aussi un opérateur.

Théorie des Champs: Éq. KG

Équation KG: classique: le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 .$$

(Ici, le champ ϕ est réel. S'il avait été complexe, on aurait écrit $(\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi)$ et $\phi^\dagger\phi$ au lieu de $(\partial_\mu\phi)^2$ et ϕ^2 .)

Ceci mène aux équations du mouvement de KG:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\square + m^2)\phi = 0 .$$

Hamiltonien: avec $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$,

$$\begin{aligned} H = \int d^3x \mathcal{H} &= \int d^3x \left[\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^3x \left[\pi^2 - \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right] \\ &= \int d^3x \left[\pi^2 - \left(\frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2] - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \end{aligned}$$

Premier terme: énergie du mouvement; deuxième terme: énergie du gradient;
troisième terme: énergie du champ même.

Équation KG: quantification: on cherche le spectre de l'Hamiltonien. Astuce: transformée de Fourier:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) .$$

Remarque: $\phi(\vec{x})$ est réel $\implies \phi^*(\vec{p}) = \phi(-\vec{p})$. Question: pourquoi?

Dans l'espace des impulsions,

$$(\square + m^2)\phi = 0 \implies \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0 .$$

Point: c'est juste l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} .$$

Oscillateur harmonique: rappel (MQ):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2) .$$

On définit

$$\hat{a} \equiv \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \implies \hat{a}^\dagger \equiv \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \implies [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 .$$

\hat{a} et \hat{a}^\dagger sont des opérateurs d'annihilation et de création.

On peut exprimer \hat{x} et \hat{p} en fonction de \hat{a} et \hat{a}^\dagger :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) , \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \implies \hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega .$$

$|0\rangle$ est l'état qui est annihilé par $\hat{a} \implies$ on obtient le spectre:

$$\hat{H}|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle , \quad \text{avec} \quad |n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle .$$

On peut trouver le spectre de l'équation KG de la même façon: chaque mode de Fourier $\phi(\vec{p}, t)$ est un oscillateur harmonique indépendant avec son propre \hat{a} and \hat{a}^\dagger .

On s'inspire des définitions de \hat{x} et \hat{p} en fonction des \hat{a} et \hat{a}^\dagger :
 $\hat{x} \propto \hat{a} + \hat{a}^\dagger$, $\hat{p} \propto \hat{a} - \hat{a}^\dagger$.

Mais il y a une différence: \hat{x} et \hat{p} sont hermitiens, tandis que $\phi(\vec{p})$ est complexe – il est associé avec l'exponentiel $e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$. Tenant compte de ceci, on peut écrire

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) ,$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) ,$$

où (devoir #4)

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \implies [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') .$$

On exprime H en fonction des \hat{a} et \hat{a}^\dagger . Ignorant les infinités non-physiques, on peut montrer que [devoir #4]

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} .$$

Ceci nous permet de trouver le spectre de la théorie. On définit l'état fondamental: $|0\rangle$ tel que $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \forall \vec{p}$. On trouve les autres états en agissant avec $a_{\vec{p}}^\dagger$.

Remarque:

$$\begin{aligned} [H, a_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}'} (a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}'}) \\ &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^\dagger [a_{\vec{p}'}, a_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\ &= \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger . \end{aligned}$$

Avec ce résultat, on peut montrer que l'état d'une excitation $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ est un état propre de H . On a

$$H \left(a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \right) = \left([H, a_{\vec{p}}^\dagger] + a_{\vec{p}}^\dagger H \right) |0\rangle = \left(\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger H \right) |0\rangle = \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \right) .$$

Alors, $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ est un état propre de H avec énergie $E_{\vec{p}} = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.

Remarque: l'énergie est toujours positive!

Également, $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle$ a une énergie $E_{\vec{p}} + E_{\vec{q}}$, etc. Donc, l'espace est engendré par les états $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \dots |0\rangle$.

Les états $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ sont aussi des états propres de l'impulsion. On définit

$$\vec{P} \equiv - \int d^3x \pi(x) \vec{\nabla} \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} .$$

Alors

$$\vec{P} \left(a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \right) = \vec{p} \left(a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \right) .$$

Donc, l'état $|\vec{p}\rangle \equiv a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ a une impulsion \vec{p} .

Comme $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$, nous avons $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Donc: les états $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ ont les bons E , \vec{p} et $m \implies$ on appelle ces excitations *des particules*.

Remarque: ce sont des particules dans l'espace des impulsions. Et dans l'espace ordinaire?

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x})|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle .\end{aligned}$$

Ceci est une superposition linéaire d'états d'une particule avec une impulsion bien définie \implies l'action de $\phi(\vec{x})$ sur le vide crée une particule à la position \vec{x} .

Remarque: comme on crée une particule à la position \vec{x} , on connaît sa position avec certitude. Par contre, on n'a aucune information sur son impulsion. C'est cohérent avec le principe d'incertitude de Heisenberg.

Comme les $a_{\vec{p}}^\dagger$ commutent, nous avons

$$a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle = a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle ,$$

⇒ les états avec deux particules échangées sont identiques.

De plus, on peut avoir 2 particules dans le même état:

$$a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \neq 0 .$$

Donc, ces particules obéissent à des statistiques Bose-Einstein ⇒ ils sont des *scalaires* ⇒ l'équation KG décrit des scalaires (e.g., Higgs).

Dépendance du Temps

On change de la représentation de Schroedinger (états: dépendants du temps, opérateurs: indépendants du temps) à la représentation de Heisenberg (états: indépendants du temps, opérateurs: dépendants du temps).

MQ:

$$\langle \xi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle = \langle \xi(0) | U^\dagger(t) \mathcal{O} U(t) | \psi(0) \rangle ,$$

où $U(t) = \exp(-iHt)$ (l'opérateur d'évolution). On définit

$$\begin{aligned} |\psi_H(t)\rangle &\equiv U^{-1}(t) |\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle , \\ \mathcal{O}_H(t) &\equiv U^{-1}(t) \mathcal{O} U(t) , \\ \implies \langle \xi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle &= \langle \xi_H | \mathcal{O}_H(t) | \psi_H \rangle . \end{aligned}$$

Les opérateurs obéissent aux équations du mouvement de Heisenberg:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{O}_H(t) = [\mathcal{O}_H(t), H] .$$

Théorie des champs: $\phi(\vec{x})$ et $\pi(\vec{x})$ sont indépendants du t . On peut les rendre dépendants du t :

$$\begin{aligned}\phi(x) = \phi(\vec{x}, t) &= e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} , \\ \pi(x) = \pi(\vec{x}, t) &= e^{iHt} \pi(\vec{x}) e^{-iHt} .\end{aligned}$$

Ces opérateurs obéissent aux équations du mouvement de Heisenberg. Avec $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ et

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) &= [\phi(\vec{x}, t), H] = i\pi(\vec{x}, t) , \\ , \quad i \frac{\partial}{\partial t} \pi(\vec{x}, t) &= [\pi(\vec{x}, t), H] = -i \left(-\vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(\vec{x}, t) .\end{aligned}$$

On peut combiner ces deux résultats: l'équation KG:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \left(\vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \phi .$$

En fonction des opérateurs d'annihilation et de création, $\phi(x)$ et $\pi(x)$ peuvent s'écrire

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) ,$$
$$\pi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) .$$

Remarque: $\pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi}(\vec{x}, t)$.

$\phi(\vec{x}, t)$: (i) opérateur de l'espace d'Hilbert qui crée ($a_{\vec{p}}^\dagger$) et détruit ($a_{\vec{p}}$) des particules, (ii) combinaison linéaire des solutions ($e^{ip \cdot x}$, $e^{-ip \cdot x}$) de l'équation KG.

On remarque que les deux signes de t apparaissent: $e^{-ip^0 t}$, $e^{ip^0 t}$, avec $p^0 > 0$. Si les ϕ étaient des *fonctions d'ondes* d'une particule, ils correspondraient aux états d'énergie positive et négative:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \begin{cases} p^0 \psi & \text{pour } e^{-ip^0 t}, \\ -p^0 \psi & \text{pour } e^{ip^0 t}. \end{cases}$$

Cependant, les ϕ ne sont pas des fonctions d'ondes. Ils sont des champs qui impliquent plus d'une particule. On dit qu'ils sont des modes de *fréquence* positive et négative. Une solution de fréquence positive a comme coefficient $a_{\vec{p}}$, l'opérateur qui *détruit* une particule. Une solution de fréquence négative est le complexe hermitien de la solution de fréquence positive: elle a comme coefficient $a_{\vec{p}}^\dagger$, l'opérateur qui *créé* une particule.

Donc: les *particules* ont toutes une énergie positive, mais il y a des solutions de fréquence positive et négative.

Propagateur Klein-Gordon

On considère $[\phi(x), \phi(y)]$:

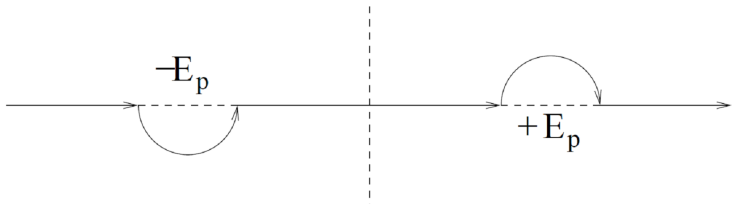
$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} > 0} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} + \frac{1}{-2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = -E_{\vec{p}}} \right\}. \end{aligned}$$

On peut l'écrire sous une autre forme à l'aide du théorème de Cauchy (résidues dans le plan complexe). La forme la plus utile (la prescription de Feynman) est de définir

$$D_F \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}.$$

On peut intégrer avec une intégrale de contour. Cependant, dans cette expression, il y a des pôles à $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$ (pour l'instant, on met $\epsilon = 0$). Donc, il faut un contour qui évite ces pôles.

Il est utile de choisir le contour qui est déformé *en-dessous* du pôle à $p^0 = -E_{\vec{p}}$ et *au-dessus* du pôle à $p^0 = +E_{\vec{p}}$:



On peut aussi déplacer les pôles légèrement ($\epsilon \neq 0$), de sorte que le contour suit l'axe \hat{x} . Dans ce cas, les pôles sont à $\pm(E_{\vec{p}} - i\epsilon)$, ce qui correspond à l'expression pour D_F sur la page précédente.

Pour $x^0 > y^0$, on ferme le contour en bas. Le contour contient donc le pôle à $+E_{\vec{p}}$ et on obtient $D_F(x - y)$. Pour $x^0 < y^0$, on ferme le contour en haut. Le contour contient donc le pôle à $-E_{\vec{p}}$ et on obtient $D_F(y - x)$.

On tient compte de cette information en écrivant

$$D_F(x - y) = \begin{cases} D(x - y) & \text{pour } x^0 > y^0 \\ D(y - x) & \text{pour } y^0 > x^0 \end{cases}, \equiv \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle ,$$

où T est le *symbol d'ordre temporel*. T nous indique qu'il faut placer les opérateurs qui le suivent en ordre, avec le plus tard à gauche.

$D_F(x - y)$ est le *propagateur de Feynman* pour une particule KG. Il représente l'amplitude pour une particule de se propager de x à y . C'est-à-dire; une particule est créée au point x , elle se déplace au point y , où elle est annihilée.

Théorie des Champs: Éq. Dirac

Équation Dirac: classique: le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi .$$

Il y a deux champs, ψ et $\bar{\psi}$. Si on calcule les équations du mouvement pour $\bar{\psi}$, on obtient l'équation de Dirac pour ψ et vice-versa.

Les champs conjugués dans le formalisme d'Hamilton sont:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi}(i\gamma^0) = i\psi^\dagger , \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 (!) .$$

Équation Dirac: quantification: on écrit ψ comme la somme des solutions de l'éq. de Dirac, multipliées par des opérateurs de création et d'annihilation:

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) .$$

Également,

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} i \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} u^{s\dagger}(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^s v^{s\dagger}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) ,$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x})\gamma^0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) .$$

Point clé: les champs obéissent à des relations *d'anticommutation*:

$$\{\psi_a(\vec{x}), \pi_b(\vec{y})\} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab} , \quad \{\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})\} = \{\pi_a(\vec{x}), \pi_b(\vec{y})\} = 0 .$$

Ceci implique que

$$\left\{ a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} .$$

Tous les autres anticommutateurs = 0.

On définit le vide $|0\rangle$ de sorte que

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0 .$$

Puisque nous avons des relations d'anticommutation,

$$a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle = -a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle .$$

Donc: l'état change de signe lors de l'échange des particules \implies on ne peut pas avoir 2 particules dans le même état. Alors, nos particules obéissent à des statistiques de Fermi-Dirac, elles sont des *fermions*.

On exprime l'Hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right) .$$

Donc, les particules créés par les a^\dagger et b^\dagger contribuent toutes les deux une *énergie positive*.

Remarque: si on avait utilisé des relations de *commutation*, on aurait trouvé que les particules de type b diminuent l'énergie du système \implies pas de vide. Avec des relations d'anticommutation, le vide est l'état d'énergie minimale.

Il y a un courant conservé:

$$j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad \text{avec} \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 .$$

$j^\mu(x)$ est conservé si ψ est une solution de l'éq. de Dirac.

La charge correspondante est

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x j^0 = \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = \int d^3x \psi^\dagger\psi \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right) . \end{aligned}$$

Donc, la charge des excitations de type b est opposée à celle des excitations de type $a \implies a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ crée des particules d'énergie $E_{\vec{p}}$, impulsion \vec{p} et charge Q , tandis que $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ crée des particules d'énergie $E_{\vec{p}}$, impulsion \vec{p} et charge $-Q$. On appelle cette charge le *nombre fermionique*: les particules de type a et b sont des *fermions* et *antifermions*, respectivement.

Remarque: $\psi(x)$ contient les opérateurs $a_{\vec{p}}^s$ et $b_{\vec{p}}^{s\dagger} \implies$ il *annihile* des particules ou *crée* des antiparticules. $\bar{\psi}(x)$ fait l'opposée.

La normalisation des états d'une particule est la même que pour l'éq. de KG:

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle$$

\implies

$$\langle \vec{p}, r | \vec{q}, s \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} .$$

Comme nous avons montré, $a_{\vec{p}}^{1\dagger}$ et $a_{\vec{p}}^{2\dagger}$ ont une hélicité opposée, également pour $b_{\vec{p}}^{1\dagger}$ et $b_{\vec{p}}^{2\dagger}$.

Mais: l'hélicité est opposée pour des particules et antiparticules. Pour des particules, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondent aux spin $+1/2$ et spin $-1/2$, respectivement. Cependant, pour des antiparticules, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondent aux spin $-1/2$ et spin $+1/2$, respectivement.

Propagateur de Dirac: comme pour l'éq. KG, on exprime $\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}$ en fonction des intégrales de contour. Avec la prescription de Feynman, ceci prend la forme

$$\begin{aligned}
 S_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \\
 &= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{pour } x^0 - y^0 > 0, \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{pour } x^0 - y^0 < 0 \end{cases} \\
 &\equiv \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle .
 \end{aligned}$$

Remarque: il y a un signe moins quand on échange des opérateurs fermioniques (et non seulement des particules identiques).

Théorie des Champs: Électromagnétisme

Électromagnétisme: classique: on décrit les champs \vec{E} and \vec{B} par les équations de Maxwell:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & , & & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{j} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & , & & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .\end{aligned}$$

ρ et \vec{j} correspondent aux sources.

Des deux dernières équations, on peut écrire

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ,$$

où ϕ et \vec{A} sont les potentiels scalaires et vectoriels.

Mais: ces relations ne déterminent pas uniquement les potentiels. Les transformations suivantes mènent aux mêmes champs \vec{E} et \vec{B} :

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f,$$

où $f(\vec{x}, t)$ est une fonction quelconque. On appelle ceci *une transformation de jauge*.

On peut écrire ceci sous une forme covariante. On forme le tenseur de rang 2:

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Pour des champs libres ($\rho = \vec{j} = 0$) on peut écrire les équations de Maxwell comme suit:

$$(i) \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (ii) \partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) = 0.$$

Exemples:

$$(i) \mu = 0 : \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0,$$

$$(i) \mu = 3 : \partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} = 0 \implies (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

$$(ii) \lambda = 0, \mu = 1, \nu = 2 : \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0 \implies (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t},$$

$$(ii) \lambda = 1, \mu = 2, \nu = 3 : \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

On peut écrire les champs \vec{E} et \vec{B} en termes de potentiels:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

et la transformation de jauge s'écrit

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x).$$

Électromagnétisme: quantification: on peut dériver les équations de Maxwell à partir du Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} .$$

Cependant, ce Lagrangien n'est pas approprié pour faire la quantification canonique. Avec $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$, nous avons

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{\mu 0}(x)$$

$\implies \pi^0(x) = 0$, ce qui est incompatible avec les relations de commutation

$$[\phi^0(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) .$$

On peut quantifier la théorie à l'aide d'un Lagrangien différent:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [\partial^\nu A^\mu(x)] [\partial_\nu A_\mu(x)] .$$

Les équations pour le champs A^μ sont

$$\square A^\mu(x) = 0 ,$$

qui est compatible avec les équations de Maxwell seulement si $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$.

Dans ce cas, la quantification canonique donne

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu ,$$

ce qui est bon.

Donc, on suit la procédure suivante: on utilise le deuxième Lagrangien, on quantifie et ensuite on impose $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$.

Mais: sous une transformation de jauge,

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \square f(x) .$$

La condition $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ ne tient que pour des jauges où $\square f(x) = 0$. Donc, il y a une restriction sur les jauges. C'est la *condition de Lorentz*. Avec ça, on peut faire la quantification (voir, e.g., Mandl & Shaw).

Voici les résultats principaux. On remarque que $\square A^\mu(x) = 0$ est l'éq. de KG avec $m = 0$, i.e., chaque composante de A^μ satisfait à l'éq. de KG. On peut donc écrire

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{r=0}^3 \left(a_{\vec{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip \cdot x} \right) ,$$

où $\epsilon_\mu^r(p)$ est la polarisation du photon.

Pourquoi 4 $\epsilon_\mu^r(p)$ s? Nous savons que $A_\mu(x)$ est proportionnel à un 4-vecteur qu'on appelle $\epsilon_\mu(p)$. La somme correspond au nombre de $\epsilon_\mu(p)$ indépendants. $A_\mu(x)$ a 4 composantes $\implies \exists$ 4 $\epsilon_\mu(p)$ s.

Mais, nous avons l'invariance de jauge: les équations de Maxwell sont invariantes sous $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$. Nous pouvons choisir notre $f(x)$ (i.e., la jauge) tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. C'est *la jauge de Coulomb*. Ceci réduit d'un le nombre de $\epsilon_\mu(p)$ indépendants.

De plus, équations du mouvement: $\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = 0$. Pour $\mu = 0$, on a

$$\partial_\nu F^{0\nu}(x) = \partial_\nu [\partial^0 A^\nu - \partial^\nu A^0] = \vec{\nabla} \cdot [\partial^0 \vec{A} + \vec{\nabla} A^0] = \partial^0(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla}^2 A^0 = 0.$$

Premier terme = 0 par ce que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Deuxième terme: la seule solution est $A^0 = 0$. Ceci réduit à 2 le nombre de $\epsilon_\mu(p)$ indépendants.

Équivalent: le photon a $m = 0 \implies$ polarisation transverse. Pour chacun des ϵ^i ($i = 1, 2, 3$), nous avons $\epsilon_\mu = (0, \vec{\epsilon})$, avec $\vec{p} \cdot \vec{\epsilon} = 0$. Il y a 2 ϵ_μ non-nuls. e.g., si $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{z}$, on peut écrire $\epsilon^1 = (0, 1, 0, 0)$ et $\epsilon^2 = (0, 0, 1, 0)$, avec $\epsilon^3 = 0$.

Avec cette expression pour $A^\mu(x)$, nous avons

$$[A^\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^\nu(\vec{y}, t)] = -ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) .$$

Pour les polarisations, on a $p \cdot \epsilon = p^\mu \epsilon_\mu = 0$ et

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = -g_{\mu\nu} .$$

Cette relation est nécessaire dans n'importe quel processus impliquant des photons externes non-polarisés.

Le propagateur du photon est

$$D_F^{\mu\nu} \equiv \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} (-g^{\mu\nu}) e^{-ip \cdot (x-y)} .$$

Avec cette quantification, on peut désormais utiliser le premier Lagrangien:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} .$$

Interactions

Rappel: l'équation de Dirac est invariante sous

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) .$$

C'est une transformation *globale*.

Rappel: l'électromagnétisme:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \text{ invariant sous } A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) .$$

La fonction $\alpha(x)$ dépend de x . C'est une transformation *locale*.

Remarque: un terme de masse pour le photon: $\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$. Ceci *brise* l'invariance de jauge locale:

$$A^\mu A_\mu \rightarrow (A^\mu - \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x))(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)) \neq A^\mu A_\mu .$$

Donc: l'invariance de jauge locale \implies photon sans masse.

Qu'est-ce qui se passe si on impose une transformation de jauge locale sur l'équation de Dirac?

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) .$$

Alors

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) .$$

Donc: le Lagrangien de Dirac n'est pas invariant sous des transformations de jauge locales.

Mais: on peut retrouver l'invariance de jauge locale en introduisant un potentiel électromagnétique. On ajoute le terme

$$-ej^\mu A_\mu \quad \text{où} \quad j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi .$$

Le Lagrangien de Dirac est maintenant invariant sous des transformations de jauge locales. Le terme $-ej^\mu A_\mu$ est une *interaction* entre le photon et les fermions.

La Force Électromagnétique: QED

Il faut ajouter aussi le terme cinétique pour le photon:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu .$$

C'est le Lagrangien pour l'Electrodynamique Quantique (QED). Donc, la QED est le résultat de l'imposition de l'invariance de jauge locale sur l'équation de Dirac.

Une forme plus compacte: on introduit *la dérivée covariante*:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu .$$

On peut écrire

$$F^{\mu\nu}(x) = \mathcal{D}^\mu A^\nu(x) - \mathcal{D}^\nu A^\mu(x) .$$

Sous une transformation de jauge locale,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \psi(x) &\rightarrow (\partial_\mu + ieA'_\mu) e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} ([i\partial_\mu \alpha(x) + \partial_\mu] + [ie(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x))]) \psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi(x) . \end{aligned}$$

En fonction de la dérivée covariante,

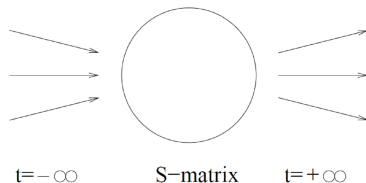
$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi ,$$

ce qui est invariant de jauge.

Le Lagrangien de QED implique le terme d'interaction $-ej^\mu A_\mu$. Il faut tenir compte de ce terme en théorie des champs.

Matrice S

On cherche la probabilité qu'un ensemble de particules, libres loin dans le passé, se diffuse en un autre ensemble de particules, libres loin dans l'avenir. La diffusion est due aux interactions. Pour ceci, il faut calculer la matrice S .



On a

$$H = H_0 + H_I ,$$

où H_0 et H_I sont, respectivement, les Hamiltoniens libres et avec interactions.

(i) Aucune interaction ($H_I = 0$). À t_0 , on définit $\phi(t_0, \vec{x})$. Plus tard, au temps t ,

$$\phi(t, \vec{x})|_{H_I=0} = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \vec{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \vec{x}) .$$

$\phi_I(t, \vec{x})$ est le champ dans *la représentation d'interactions*. Il est connu – c'est simplement le champ libre au temps t .

(ii) On ajoute les interactions:

$$\begin{aligned}\phi(t, \vec{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t, \vec{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &\equiv U^\dagger(t, t_0)\phi_I(t, \vec{x})U(t, t_0) .\end{aligned}$$

Ici, l'opérateur d'évolution est

$$U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} .$$

Question: on a $H = H_0 + H_I$. Pourquoi est-ce que

$$e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \neq e^{-iH_I(t-t_0)} ?$$

$U(t, t_0)$ satisfait à

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_I e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I(t) U(t, t_0) .\end{aligned}$$

La matrice S est défini comme étant $U(\infty, -\infty)$. Donc: il faut résoudre l'équation ci-dessus.

On a $U(t_0, t_0) = 1 \implies$

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t') U(t', t_0) .$$

On peut trouver $U(t, t_0)$ par itération:

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t'') U(t'', t_0) \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n), \quad t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq t_0 \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n T [H_I(t_1) \dots H_I(t_n)].
 \end{aligned}$$

Avec $H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I$, on peut écrire

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T [\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)].$$

Donc: si le couplage de l'interaction est petit, cette expression donne un développement perturbatif pour S .

Règles de Feynman

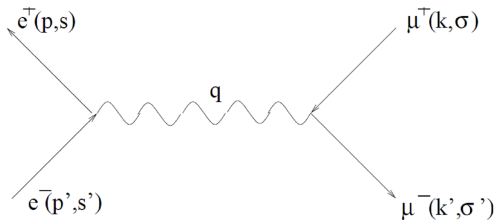
On considère le processus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. On veut calculer $\langle f | S | i \rangle$, où $i = e^+(p, s)e^-(p', s')$ et $f = \mu^+(k, \sigma)\mu^-(k', \sigma')$. Nous avons

$$\mathcal{H}_I(x) = e [\bar{\psi}_e(x)\gamma^\nu\psi_e(x) + \bar{\psi}_\mu(x)\gamma^\nu\psi_\mu(x)] A_\nu(x).$$

Il nous faut 2 facteurs de $\mathcal{H}_I(x)$: un pour l'annihilation e^+e^- , l'autre pour la production de $\mu^+\mu^-$. Donc, à l'ordre le plus bas,

$$S_{fi} = \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x d^4x' \langle f | T [\mathcal{H}_I(x)\mathcal{H}_I(x')] | i \rangle.$$

On peut représenter ce processus par un *diagramme de Feynman*:



Rappel: dans la représentation de Heisenberg:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) .$$

De cette expression, on peut déduire les termes nécessaires pour S_{fi} .

Considérons l' e^- initial seulement et calculons $\psi |e^-(p', s')\rangle$. Dans la représentation de Schroedinger, on a

$$\begin{aligned} \psi |e^-(p', s')\rangle &\sim \int d^3 p \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right) a_{\vec{p}'}^{s'\dagger} |0\rangle \\ &= \int d^3 p \sum_s u^s(p) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \left(\{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{p}'}^{s'\dagger}\} - a_{\vec{p}'}^{s'\dagger} a_{\vec{p}}^s \right) |0\rangle = u^{s'}(p') e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}} |0\rangle . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{annihile } e^+(p, s) \text{ à } x &: \bar{v}(p, s) e^{-ip \cdot x} , \\ \text{annihile } e^-(p', s') \text{ à } x &: u(p', s') e^{-ip' \cdot x} , \\ \text{créé } \mu^+(k, \sigma) \text{ à } x' &: v(k, \sigma) e^{ik \cdot x'} , \\ \text{créé } \mu^-(k', \sigma') \text{ à } x' &: \bar{u}(k', \sigma') e^{ik' \cdot x'} . \end{aligned}$$

Donc:

$$S_{fi} = \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4x d^4x' \langle 0| T [A_\mu(x)A_\nu(x')] |0\rangle \times$$
$$\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}\sqrt{2E_{\vec{p}'}}\sqrt{2E_{\vec{k}}}\sqrt{2E_{\vec{k}'}}} \times$$
$$\left\{ [\bar{u}(k', \sigma')\gamma^\nu v(k, \sigma)] e^{ix' \cdot (k+k')} [\bar{v}(p, s)\gamma^\mu u(p', s')] e^{-ix \cdot (p+p')} \right.$$
$$\left. + [\bar{u}(k', \sigma')\gamma^\mu v(k, \sigma)] e^{ix' \cdot (k+k')} [\bar{v}(p, s)\gamma^\nu u(p', s')] e^{-ix \cdot (p+p')} \right\} .$$

Mais,

$$\langle 0| TA_\mu(x)A_\nu(x') |0\rangle = D_{F\mu\nu} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 + i\epsilon} (-g_{\mu\nu}) e^{-iq \cdot (x-x')} .$$

Le premier terme dans S_{fi} contient l'intégrale

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4x' d^4q e^{ix' \cdot (k+k')} e^{-ix \cdot (p+p')} e^{-iq \cdot (x-x')} \\ = \int d^4q (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p'+q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+k'+q) \\ = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p+p'-k-k'). \end{aligned}$$

Ici, $q = -(p+p') = -(k+k')$.

On traite le 2me terme dans S_{fi} de façon similaire. Son intégrale est

$$(2\pi)^8 \delta^{(4)}(p+p'-k-k'),$$

avec $q = +(p+p') = +(k+k')$.

Alors, on trouve

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i - \sum p_f)}{\sqrt{\prod 2E_{i,f}}} \mathcal{M}_{fi} ,$$

où

$$\mathcal{M}_{fi} = (-ie)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [\bar{u}(k', \sigma') \gamma^\mu v(k, \sigma)] [\bar{v}(p, s) \gamma^\nu u(p', s')] .$$

On appelle \mathcal{M}_{fi} l'amplitude de diffusion.

Dans le calcul de S_{fi} , nous utilisons les *règles de Feynman*:

$$\begin{aligned}
 e^- \text{ annihilé} & : u(p', s') , \\
 e^+ \text{ annihilé} & : \bar{v}(p, s) , \\
 \text{terme du vertex} & : -ie\gamma^\mu , \\
 \mu^- \text{ créé} & : \bar{u}(k', \sigma') , \\
 \mu^+ \text{ créé} & : v(k, \sigma) , \\
 \text{propagateur du photon} & : \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} , \\
 \text{conservation d'énergie-impulsion} & : (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p_i - \sum p_f \right) , \\
 \frac{1}{\sqrt{2E}} & \text{ pour chaque particule .}
 \end{aligned}$$

On peut adapter ces règles de Feynman à n'importe quel processus.

Remarque: en général, le terme du vertex pour des fermions est $iQe\gamma^\mu$ ($Q = -1$ pour un e^- [ou e^+]).

Évaluation des Diagrammes de Feynman

Règles de Feynman \implies calcul de S_{fi} . Mais on cherche la *probabilité* qu'un processus se produise \implies il faut calculer le carré de l'amplitude. Deux étapes: (i) calculer $|\mathcal{M}_{fi}|^2$, (ii) le convertir en section efficace. Pour montrer la procédure, on se concentre sur le processus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

$|\mathcal{M}_{fi}|^2$: on suppose que les spins ne sont pas mesurés \implies il faut calculer la somme des spins finaux et la moyenne des spins initiaux \implies on calcule

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 ,$$

où

$$\mathcal{M}_{fi} = (-ie)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [\bar{u}(k', \sigma') \gamma^\mu v(k, \sigma)] [\bar{v}(p, s) \gamma^\nu u(p', s')] .$$

Pour ce calcul, voici une technique qu'on utilisera. On considère le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} .$$

Nous avons

$$|V|^2 = V^\dagger V = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 .$$

Ceci est un chiffre, i.e., une matrice 1×1 . Donc on peut écrire

$$|V|^2 = \text{Tr}(V^\dagger V) = \text{Tr}(VV^\dagger) ,$$

où on a utilisé la propriété cyclique de la trace. Mais VV^\dagger est une matrice \implies on a écrit un chiffre (produit scalaire) comme la trace d'une matrice.

Également on peut écrire

$$V^\dagger M_1 M_2 M_3 V = \text{Tr}(VV^\dagger M_1 M_2 M_3) ; \quad V_1^\dagger V_2 V_3^\dagger V_4 = \text{Tr}(V_4 V_1^\dagger M) ,$$

où les M_i sont des matrices 3×3 (à gauche) et $M = V_2 V_3^\dagger$ (à droite).

Or,

$$\sum_{s_1 s_2} [\bar{u}(p_1, s_1) \cancel{A} \cancel{B} \dots \cancel{Z} u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \cancel{A} \cancel{B} \dots \cancel{Z} u(p_2, s_2)]^\dagger \\ = \sum_{s_1 s_2} [\bar{u}(p_1, s_1) \cancel{A} \cancel{B} \dots \cancel{Z} u(p_2, s_2)] [u^\dagger(p_2, s_2) \cancel{Z}^\dagger \dots \cancel{B}^\dagger \cancel{A}^\dagger \gamma^0 u(p_1, s_1)] .$$

Avec $\gamma^0 \gamma^\mu \dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$, le 2me terme devient

$$[u^\dagger(p_2, s_2) \cancel{Z}^\dagger \dots \cancel{B}^\dagger \cancel{A}^\dagger \gamma^0 u(p_1, s_1)] \\ = [u^\dagger(p_2, s_2) \gamma^0 \gamma^0 \cancel{Z}^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \dots \cancel{A}^\dagger \gamma^0 u(p_1, s_1)] \\ = [\bar{u}(p_2, s_2) \cancel{Z} \dots \cancel{B} \cancel{A} u(p_1, s_1)] .$$

Rappel:

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = (\not{p} + m) , \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = (\not{p} - m) .$$

Alors

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1 s_2} [\bar{u}(p_1, s_1) A \not{B} \dots \not{Z} u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) A \not{B} \dots \not{Z} u(p_2, s_2)]^\dagger \\ &= \sum_{s_1} \bar{u}_1 [A \not{B} \dots \not{Z} (\not{p}_2 + m_2) \not{Z} \dots \not{B} A] u_1 \\ &= \text{Tr} [\sum_{s_1} \bar{u}_1 [A \not{B} \dots \not{Z} (\not{p}_2 + m_2) \not{Z} \dots \not{B} A] u_1] \\ &= \text{Tr} [\sum_{s_1} u_1 \bar{u}_1 [A \not{B} \dots \not{Z} (\not{p}_2 + m_2) \not{Z} \dots \not{B} A]] \\ &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m_1) [A \not{B} \dots \not{Z} (\not{p}_2 + m_2) \not{Z} \dots \not{B} A]] . \end{aligned}$$

Donc: le calcul de $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ impliquera la trace de matrices γ .

Pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ nous avons

$$\mathcal{M}_{fi} = (-ie)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [\bar{u}(k', \sigma') \gamma^\mu v(k, \sigma)] [\bar{v}(p, s) \gamma^\nu u(p', s')] ,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{4} \frac{(-ie)^4}{(q^2 + i\epsilon)^2} g_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} \text{Tr} [(k' + m_\mu) \gamma^\mu (k - m_\mu) \gamma^\kappa] \times \\ &\quad \text{Tr} [(p' - m_e) \gamma^\nu (p + m_e) \gamma^\lambda] . \end{aligned}$$

∃ 3 types de traces, impliquant 2, 3 ou 4 matrices γ :

- Trace d'un nombre impair de matrices γ :

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{2n+1}] &= \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^5 \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{2n+1}] = (-1)^{2n+1} \text{Tr} [\gamma^5 \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{2n+1} \gamma^5] \\ &= (-1)^{2n+1} \text{Tr} [\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{2n+1}] = -\text{Tr} [\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{2n+1}] . \end{aligned}$$

⇒ la trace d'un nombre impair de matrices $\gamma = 0$.

- Trace de 2 matrices γ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}[AB] &= \frac{1}{2}\text{Tr}[AB + BA] = \frac{1}{2}\text{Tr}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} A_\mu B_\nu \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}[2g^{\mu\nu}] A_\mu B_\nu = \frac{1}{2} \cdot 2g^{\mu\nu} \cdot 4 \cdot A_\mu B_\nu = 4A \cdot B.\end{aligned}$$

- Trace de 4 matrices γ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}[ABCD] &= \text{Tr}[\{A, B\}CD] - \text{Tr}[B\{A, C\}D] \\ &\quad + \text{Tr}[BC\{A, D\}] - \text{Tr}[BCDA].\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}2\text{Tr}[ABCD] &= \text{Tr}[\{A, B\}CD] - \text{Tr}[B\{A, C\}D] + \text{Tr}[BC\{A, D\}] \\ &= 2A \cdot B C \cdot D - 2A \cdot C B \cdot D + 2A \cdot D B \cdot C \\ \Rightarrow \text{Tr}[ABCD] &= 4(A \cdot B C \cdot D - A \cdot C B \cdot D + A \cdot D B \cdot C).\end{aligned}$$

Remarque: $\text{Tr}[A\gamma^\mu C\gamma^\nu] = 4(A^\mu C^\nu - A \cdot C g^{\mu\nu} + A^\nu C^\mu)$.

Pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ nous avons

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4} e^4 \left(\frac{1}{q^2} \right)^2 M^{\mu\nu} E_{\mu\nu} ,$$

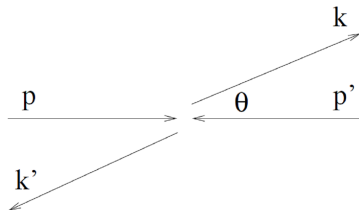
où

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \text{Tr} [(k' + m_\mu)\gamma^\mu(k - m_\mu)\gamma^\nu] = 4(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - (m_\mu^2 + k \cdot k')g^{\mu\nu}) , \\ E_{\mu\nu} &= \text{Tr} [(p' - m_e)\gamma_\mu(p' + m_e)\gamma_\nu] = 4(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (m_e^2 + p \cdot p')g_{\mu\nu}) . \end{aligned}$$

Alors

$$M^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 32(k \cdot p k' \cdot p' + k \cdot p' k' \cdot p + m_\mu^2 p \cdot p' + m_e^2 k \cdot k' + 2m_\mu^2 m_e^2) .$$

Afin d'évaluer les produits scalaires, il faut choisir un référentiel. Nous utilisons le centre de masse:



4-vecteurs:

$$p = (E, \vec{p}) , \quad p' = (E, -\vec{p}) ; \quad k = (E, \vec{k}) , \quad k' = (E, -\vec{k}) .$$

Il y a un angle θ entre les directions e^+e^- et $\mu^+\mu^-$: $\hat{p} \cdot \hat{k} = z \equiv \cos \theta$.

On définit

$$\beta_e \equiv \frac{|\vec{p}|}{E} , \quad \beta_\mu \equiv \frac{|\vec{k}|}{E} .$$

Dans le CM,

$$s = (p + p')^2 = (k + k')^2 = 4E^2 .$$

Rappel: $q^2 = s \implies (q^2)^2 = 16E^4$. Les produits scalaires sont

$$\begin{aligned} k' \cdot p' &= k \cdot p = E^2(1 - \beta_\mu \beta_e z) & , & & k \cdot p' &= k' \cdot p = E^2(1 + \beta_\mu \beta_e z) , \\ p \cdot p' &= E^2(1 + \beta_e^2) & , & & k \cdot k' &= E^2(1 + \beta_\mu^2) , \\ m_e^2 &= E^2(1 - \beta_e^2) & , & & m_\mu^2 &= E^2(1 - \beta_\mu^2) . \end{aligned}$$

Mettant tout ensemble, on obtient

$$M^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 64E^4 [(1 + \beta_\mu^2 \beta_e^2 z^2) + (2 - \beta_e^2 - \beta_\mu^2)] .$$

Remarque: si on néglige m_e et m_μ , i.e., $\beta_e = \beta_\mu = 1$, on trouve une distribution $1 + \cos^2 \theta$.

Variables de Mandelstam

Pour le calcul général de $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ pour des processus $2 \rightarrow 2$, $P_1(p)P_2(p') \rightarrow P_3(k)P_4(k')$, il est utile d'introduire les variables de Mandelstam:

$$\begin{aligned}s &= (p + p')^2 = (k + k')^2, \\t &= (k - p)^2 = (k' - p')^2, \\u &= (k - p')^2 = (k' - p)^2.\end{aligned}$$

(Remarque: pour distinguer entre t et u , t implique les particules initiales et finales *les plus similaires*.)

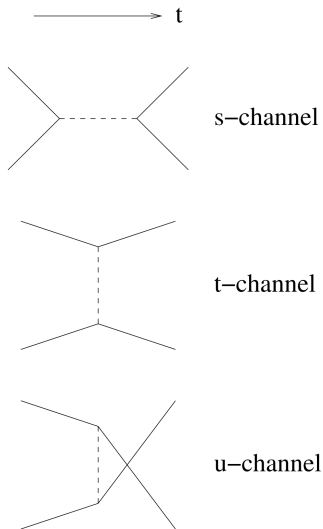
e.g., pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, on peut écrire

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2).$$

On peut facilement montrer que

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2.$$

Un processus $2 \rightarrow 2$ implique l'échange d'une particule virtuelle. On décrit cette particule comme étant dans un certain *canal*:



Souvent un processus donné aura plus d'un canal. Il faut additionner les amplitudes de façon cohérente et il faut porter attention au signe entre les deux amplitudes. E.g., la diffusion Bhabha ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, devoir #5) reçoit des contributions du canal s et du canal t .

Section Efficace

Section efficace: proportionnelle à la probabilité (qu'un processus se produise) par unité de temps (le taux). C'est indépendant du flux incident, ainsi que de la densité de particules de la cible \implies il faut enlever cette dépendance du taux.

(i) On parle des densités \implies on normalise les champs de toutes les particules par rapport au volume V :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \dots$$

$|\psi(x)|^2$ donne maintenant le nombre de particules par unité de volume (la densité). Le facteur supplémentaire de $1/\sqrt{V}$ change l'amplitude de diffusion: $\mathcal{M}_{fi} \rightarrow \mathcal{M}_{fi}/V^2$. On s'attend à ce que toute dépendance de V s'annule à la fin.

(ii) La section efficace σ est définie par $(\text{flux}) \times (\sigma) = (\text{taux})$, où le taux est $|S_{fi}|^2$ par unité de temps. Mais $|S_{fi}|^2$ implique le carré d'une fonction δ :

$[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)]^2$. Qu'est-ce que c'est?

On peut écrire la fonction δ comme suit:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) = \lim_{T, V \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-it(E_f - E_i)} \int_V d^3x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p}_f - \vec{p}_i)} .$$

Le carré de la fonction δ est donc

$$\begin{aligned} & \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \right]^2 \\ &= \lim_{T, V \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-it(E_f - E_i)} \int_V d^3x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p}_f - \vec{p}_i)} \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \\ &= \lim_{T, V \rightarrow \infty} TV (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) . \end{aligned}$$

Quand on calcul la section efficace, on utilisera le taux, $|S_{fi}|^2 / T$.

(iii) Le flux incident est la vitesse relative par unité de volume: v_{rel}/V .

(iv) Il faut intégrer sur les impulsions finales, ce qui donne un facteur pour chaque particule finale:

$$V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

Mettant tout ensemble:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{|S_{fi}|^2/T}{v_{\text{rel}}/V} \\ &= V^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\prod 2E_{i,f}} V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{V}{v_{\text{rel}}} \frac{\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2}{V^4} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\prod 2E_{i,f}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2.\end{aligned}$$

Remarque: toute dépendance de V s'annule.

Intégrales finales: on définit

$$d\Phi_2 \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) .$$

On appelle les masses associées à k et k' m et m' , respectivement.

On fait l'intégrale sur d^3k' à l'aide de la fonction δ (3 dimensions):

$$\int_{\vec{k}'} d\Phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{2E_k} \frac{1}{2E_{k'}} \delta(2E - E_k - E_{k'}) .$$

Mais nous avons

$$|\vec{k}|^2 = E_k^2 - m^2 .$$

$\implies kdk = E_k dE_k$. Donc

$$\int_{\vec{k}} \int_{\vec{k}'} d\Phi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{k}| E_k dE_k d\Omega_k}{2E_k 2E_{k'}} \delta(2E - E_k - E_{k'}) .$$

Dans le CM, on a $\vec{k} = -\vec{k}'$:

$$E_k^2 - m^2 = |\vec{k}|^2 = |\vec{k}'|^2 = E_{k'}^2 - m^2 .$$

⇒ si $E_{k'}$ est traité comme étant une fonction de E_k , nous avons

$$\frac{dE_{k'}}{dE_k} = \frac{E_k}{E_{k'}} .$$

Or,

$$\int dE_k \delta(f(E_k)) = \frac{1}{|f'(E_k)|_{f(E_k)=0}} .$$

Ici, $f(E_k) = 2E - E_k - E_{k'}$:

$$|f'(E_k)| = 1 + \frac{dE_{k'}}{dE_k} = 1 + \frac{E_k}{E_{k'}} = \frac{E_k + E_{k'}}{E_{k'}} = \frac{2E}{E_{k'}} .$$

Donc:

$$\frac{d\Phi_2}{d\Omega_k} = \frac{|\vec{k}|}{4E_{k'} (2\pi)^2} \frac{E_{k'}}{2E} = \frac{|\vec{k}|}{32\pi^2 E} .$$

En dernier lieu, on considère les états initiaux: on a

$$v_{\text{rel}} = \frac{|\vec{p}|}{E_p} + \frac{|\vec{p}'|}{E_{p'}} \implies v_{\text{rel}} 2E_p 2E_{p'} \equiv 4F = 4 [E_{p'} |\vec{p}| + E_p |\vec{p}'|] .$$

Remarque: ce résultat tient dans d'autres référentiels que le CM. Si les particules initiales sont colinéaires (pas nécessairement le CM), on a

$$F = \sqrt{(p \cdot p')^2 - m^2 m'^2} ,$$

où m et m' sont les masses des particules initiales (on peut avoir $m \neq m'$).

Alors

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{(E_p E_{p'} + |\vec{p}| |\vec{p}'|)^2 - (E_p^2 - |\vec{p}|^2)(E_{p'}^2 - |\vec{p}'|^2)} \\ &= \sqrt{2E_p E_{p'} |\vec{p}| |\vec{p}'| + E_p^2 |\vec{p}'|^2 + E_{p'}^2 |\vec{p}|^2} \\ &= E_{p'} |\vec{p}| + E_p |\vec{p}'| . \end{aligned}$$

Fin remarque.

Avec $|\vec{k}|/E = \beta_\mu$ et $\alpha \equiv e^2/4\pi$, nous avons

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4F} \frac{\alpha^2 \beta_\mu}{2} [(1 + \beta_\mu^2 \beta_e^2 z^2) + (2 - \beta_e^2 - \beta_\mu^2)] .$$

Dans le CM, avec masses initiales égales,

$$F = 2E^2 \beta_e$$

\Rightarrow

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s} \frac{\beta_\mu}{\beta_e} [(1 + \beta_\mu^2 \beta_e^2 z^2) + (2 - \beta_e^2 - \beta_\mu^2)] .$$

Remarque: ce résultat est plus général que seulement $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. On peut le modifier pour d'autres processus de diffusion $2 \rightarrow 2$.

On peut intégrer la section efficace sur les variables angulaires. On néglige la masse des e^- ($\beta_e = 1$) et on utilise

$$\int d\Omega z^2 = \frac{4\pi}{3} .$$

On obtient

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\pi\alpha^2}{s}\beta_\mu \left[1 + \frac{\beta_\mu^2}{3} + 1 - \beta_\mu^2 \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left(\frac{3 - \beta_\mu^2}{2} \right) \beta_\mu .$$

Remarque: $[\sigma] = [\alpha^2/s]$.

Résumé

Étant donné un calcul de $|\mathcal{M}_{fi}|^2$, la section efficace pour un processus général a été calculée. Voici les résultats:

1. On considère un processus général à deux particules $\alpha \equiv (1, 2) \rightarrow (3, 4, \dots, n) \equiv \beta$. La section efficace est

$$d\sigma_{\beta\alpha} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2\mathcal{S}_{12}} \prod_{i=3}^n \frac{\tilde{d}p_i}{(2\pi)^3} \cdot S.$$

Ici, $|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$ inclut la somme/moyenne sur les spins et

$$\tilde{d}p_i = \frac{d^3 p_i}{2\sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}},$$

S est le poids statistique s'il y a des particules identiques dans l'état final:

$$S = \prod_{k=\text{types}} \frac{1}{n_k!},$$

et

$$\mathcal{S}_{12} = \sqrt{s - (m_1 + m_2)^2} \sqrt{s - (m_1 - m_2)^2}.$$

Pour le cas d'un processus $2 \rightarrow 2$, $\alpha \equiv (1, 2) \rightarrow (3, 4) \equiv \beta$, la section efficace différentielle est

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{64\pi^2 s} \left(\frac{\mathcal{S}_{34}}{\mathcal{S}_{12}} \right) \cdot S .$$

Pour une désintégration générale $\alpha \rightarrow (1, 2, \dots, n) \equiv \beta$, la section efficace différentielle est

$$d\Gamma_{\beta\alpha} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2p_\alpha^0} \prod_{i=1}^n \frac{\tilde{d}p_i}{(2\pi)^3} \cdot S .$$

Applications

On peut comparer la section efficace d'autres processus à celle de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

La production de hadrons est décrite par $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, où le quark/antiquark se manifeste comme des hadrons. À une énergie donnée, on peut définir

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{\text{types de quarks}} Q_q^2,$$

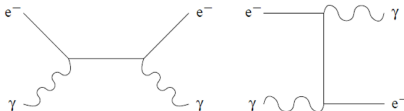
où Q_q est la charge électrique des quarks (nous avons ignoré d'autres facteurs cinématiques).

Pour $E < 2.6$ GeV, seulement le u ($Q_{em} = 2/3$), d ($-1/3$) et s ($-1/3$) sont accessibles cinématiquement. Donc $\sum Q_q^2 = 2/3 \implies$ dans $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$, on s'attend à observer $R = 2/3$. Mais: quand on a fait l'expérience, on a trouvé $R = 2$! Donc, on déduit qu'il y a 3 couleurs pour les quarks, alors $R = (2/3) \times 3 = 2$.

On a fait la diffusion e^+e^- à $E > 2.6$ GeV. À une certain énergie, la section efficace fait un saut, suggérant que d'autres canaux s'ouvrent \implies l'existence de nouvelles particules. La grandeur du saut indique la charge des nouvelles particules. De cette façon, nous avons pu déduire l'existence du quark c ($m_c = 1.3$ GeV), ainsi que le lepton τ ($m_\tau = 1.8$ GeV) et le quark b ($m_b = 4.2$ GeV).

La Diffusion Compton

On considère la diffusion Compton: $e^-(p)\gamma(k) \rightarrow e^-(p')\gamma(k')$. Les polarisations des photons initial et final sont ϵ et ϵ' , respectivement.



Le 4-impulsion de l' e^- virtuel dans les diagrammes est $q = p + k$ (1^{er} diagramme) et $q' = p - k'$ (2^{me} diagramme).

Amplitudes:

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu) u(p) \epsilon'_\mu{}^* \epsilon_\nu$$

$$= -\frac{ie^2}{2p \cdot k} \bar{u}(p') \not{\epsilon}'^* (\not{q} + m) \not{\epsilon} u(p),$$

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{q}' + m)}{q'^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu) u(p) \epsilon'_\nu{}^* \epsilon_\mu$$

$$= +\frac{ie^2}{2p \cdot k'} \bar{u}(p') \not{\epsilon} (\not{q}' + m) \not{\epsilon}'^* u(p).$$

L'amplitude totale:

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 .$$

L'amplitude au carré. On somme sur tous les spins et calcule la moyenne des spins initiaux:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{12}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \left[|\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 \right] .$$

1^{er} terme:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{1}{4} \frac{e^4}{4 (p \cdot k)^2} \sum_{\text{spins}} \left[\bar{u}(p') \not{\epsilon}^* (\not{q} + m) \not{\epsilon} u(p) \bar{u}(p) \not{\epsilon} (\not{q} + m) \not{\epsilon} u(p') \right] .$$

On utilise le fait que

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_{\mu}^* \epsilon_{\nu} = -g_{\mu\nu} \implies$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{1}{4} \frac{e^4}{4 (p \cdot k)^2} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \gamma^{\mu} (\not{q} + m) \gamma^{\nu} (\not{p} + m) \gamma_{\nu} (\not{q} + m) \gamma_{\mu} \right] .$$

On simplifie cette expression à l'aide des identités des matrices γ :

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_1|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{q} + m) (-2\not{p} + 4m) (\not{q} + m) \gamma_\mu] \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\mu \{ -2\not{q}\not{p}\not{q} - 2m\not{q}\not{p} + 4mq^2 + 8m^2\not{q} \\ &\quad - 2m\not{p}\not{q} - 2m^2\not{p} + 4m^3 \} \gamma_\mu] \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \{ 4\not{q}\not{p}\not{q} + m [-16q \cdot p + 16q^2] \\ &\quad + m^2 [4\not{p} - 16\not{q}] + 16m^3 \}] \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2} \{ 16 [2p \cdot q p' \cdot q - p \cdot p' q^2] + 4m^2 [-16q \cdot p + 16q^2] \\ &\quad + 4m^2 [4p \cdot p' - 16q \cdot p'] + 64m^4 \} . \end{aligned}$$

On exprime tous les produits scalaires en fonction de m^2 , $p \cdot k$ et $p \cdot k'$:
 $p' + k' = p + k \implies p' \cdot k' = p \cdot k$; $p' - k = p - k' \implies p' \cdot k = p \cdot k'$;
 $p' = p + k - k' \implies p \cdot p' = m^2 + p \cdot k - p \cdot k'$; $q = p + k \implies q^2 = m^2 + 2p \cdot k$.

Alors,

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{2e^4}{(p \cdot k)^2} [m^4 + m^2 p \cdot k + p \cdot k p \cdot k'] .$$

2^{me} terme:

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_2|^2 = \frac{e^4}{16 (p \cdot k')^2} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{q}' + m) \gamma^\nu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{q}' + m) \gamma_\mu] .$$

Égal à $\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_1|^2$, avec la substitution $k \leftrightarrow -k'$. Donc:

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_2|^2 = \frac{2e^4}{(p \cdot k')^2} [m^4 - m^2 p \cdot k' + p \cdot k p \cdot k'] .$$

3^{me} terme:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = -\frac{1}{4} \frac{e^4}{4 p \cdot k p \cdot k'} \times \\ \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m) \gamma_\mu (\not{q}' + m) \gamma_\nu] .$$

Avec les identités des matrices γ , on a

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = -\frac{1}{4} \frac{e^4}{4 p \cdot k p \cdot k'} [-32 p \cdot p' q \cdot q' + 16m^2 p \cdot q \\ + 16m^2 p' \cdot (p + q) + 16m^2 q' \cdot (p + q) + 16m^2 p' \cdot q' - 32m^4] .$$

On exprime tous les produits scalaires en fonction de m^2 , $p \cdot k$ et $p \cdot k'$. De plus, $q \cdot q' = m^2 \implies$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = -\frac{e^4}{p \cdot k p \cdot k'} m^2 [2m^2 + p \cdot k - p \cdot k'] .$$

4^{me} terme: $\frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 = \frac{1}{4} \sum_{spins} (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*)^* \implies$

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 = -\frac{e^4}{p \cdot k p \cdot k'} m^2 [2m^2 + p \cdot k - p \cdot k'] .$$

Au total,

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_{12}|^2 = 2e^4 \left\{ \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} \right] + 2m^2 \left[\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right] + m^4 \left[\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right]^2 \right\} .$$

Maintenant: il faut calculer la section efficace. Ici, comme il y a un photon dans l'état initial, il est plus utile de la calculer dans le référentiel du laboratoire, dans lequel il y a un photon incident sur un électron au repos. Donc, les 4-impulsions sont: $p = (m, \vec{0})$, $p' = (E', \vec{p}')$, $k = (\omega, \vec{k})$, $k' = (\omega', \vec{k}')$.

Général:

$$\sigma = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\prod 2E_{i,f}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{12}|^2 .$$

Comme auparavant, on définit

$$d\Phi_2 \equiv \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') ,$$

avec

$$\int_{\vec{p}', \vec{k}'} d\Phi_2 = \int d\Omega' \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \frac{\omega'}{E'} \frac{1}{\left| \frac{\partial(E'+\omega')}{\partial\omega'} \right|} .$$

Nous savons que $\vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}' \implies$

$$E' = \sqrt{m^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2} = \sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} ,$$

où θ est l'angle entre les photons incident et final.

Avec $E' = m + \omega - \omega'$ on a

$$\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} = \frac{E' + \omega' - \omega \cos\theta}{E'} = \frac{m + \omega(1 - \cos\theta)}{E'}.$$

Mais nous savons aussi que $p \cdot k = p \cdot k' + k' \cdot k \implies$

$$m\omega = m\omega' + \omega\omega' - \omega\omega' \cos\theta \implies m\frac{\omega}{\omega'} = m + \omega(1 - \cos\theta).$$

Donc, avec $v_{\text{rel}} = 1$,

$$\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \implies \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \frac{1}{m^2} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{12}|^2.$$

Dans le référentiel du laboratoire,

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{12}|^2 = 2e^4 \left\{ \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} \right] + 2m^2 \left[\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{m\omega'} \right] + m^4 \left[\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{m\omega'} \right]^2 \right\}.$$

Mais $m(\omega/\omega') = m + \omega(1 - \cos\theta) \implies$

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{m}(\cos\theta - 1) \implies \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{12}|^2 = 2e^4 \left\{ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right\} .$$

Finalemment:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{1}{m^2} e^4 \left\{ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right\} \\ &= \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left\{ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right\} . \end{aligned}$$

Remarque: dans la limite de basses énergies, $\omega \ll m \implies$ l'énergie cinétique de l'électron reculant est négligeable et $\omega' \simeq \omega$. Dans cette limite, on reproduit la section efficace de la diffusion de Thomson:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{2m^2} [1 + \cos^2\theta] .$$

Interactions Faibles

Interactions faibles: à basse énergie, décrites par une interaction courant-courant à 4 fermions:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j \cdot j .$$

Ici, $G_F = 1.166 \times 10^{-5}(\text{GeV})^{-2}$ est la constante de Fermi et $j = \bar{\psi}\Gamma^i\psi$. Γ^i est un covariant de Dirac dont la forme est à déterminer.

Chiralité: on peut décomposer un spineur de Dirac en deux états de chiralité:

$$\psi = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi + \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi \equiv \gamma_L\psi + \gamma_R\psi \equiv \psi_L + \psi_R ,$$

où

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi} \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) , \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) .$$

Il y a 5 possibilités pour Γ^i : 1 (scalaire, S), γ_5 (pseudoscalaire, P), γ^μ (vecteur, V), $\gamma^\mu\gamma_5$ (vecteur axial, A), $\sigma^{\mu\nu}$ (tenseur, T).

D'abord, le terme S :

$$\bar{\psi}\psi = [\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R] [\psi_L + \psi_R] .$$

Nous avons $\gamma_L^2 = \gamma_L$, $\gamma_R^2 = \gamma_R$ et $\gamma_L\gamma_R = 0$. Donc, ce terme devient

$$\bar{\psi}\psi = [\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L] .$$

On note que le terme S brise la chiralité. C'est-à-dire: il couple les particules LH aux particules RH. Également, les termes P et T brisent la chiralité, tandis que V et A la conserve. Première étape pour identifier Γ^i : établir si les interactions faibles brisent ou conservent la chiralité.

On considère $\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell$. Nous savons que $m_{\nu_\ell} \simeq 0 \implies$ purement LH. Dans la limite où $m_\ell \simeq 0$, le ℓ^+ est purement RH. Deux possibilités: (i) les interactions faibles brisent la chiralité \implies la désintégration est permise dans la limite $m_\ell \rightarrow 0$, (ii) la chiralité est conservée \implies la désintégration n'est pas permise dans la limite $m_\ell \rightarrow 0$.

On considère $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ et $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$. Nous savons que $m_e \ll m_\mu$. Si la chiralité est conservée dans les interactions faibles, on devrait trouver $\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e) \ll \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$. Par contre, si la chiralité est brisée, on devrait trouver peu de différence entre les deux taux.

Expérience:

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} \simeq 1.2 \times 10^{-4} = \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right).$$

Conclusion: les interactions faibles conservent la chiralité \implies le courant j implique seulement V et A .

$$(V - A) \times (V - A)$$

Afin de déduire la forme du courant j , on considère la désintégration du muon:

$$\mu^-(p, s) \rightarrow \nu_\mu(p', s') e^-(k', \sigma') \bar{\nu}_e(k, \sigma).$$

(Nous avons calculé un processus $2 \rightarrow 2$ dans QED; on calcule la désintégration $1 \rightarrow 3$ de façon similaire.)

On définit l'interaction à 4 fermions comme étant

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_1^\mu j_{\mu 2},$$

où

$$\begin{aligned} j_1^\mu &= \bar{\psi}'_1 \gamma^\mu \gamma_L Q_{1L} \psi_1 + \bar{\psi}'_1 \gamma^\mu \gamma_R Q_{1R} \psi_1, \\ j_{\mu 2} &= \bar{\psi}'_2 \gamma_\mu \gamma_L Q_{2L} \psi_2 + \bar{\psi}'_2 \gamma_\mu \gamma_R Q_{2R} \psi_2, \end{aligned}$$

Nous supposons toujours que les spins ne soient pas mesurés.

$(j_1^\mu)^2$:

$$F_1^{\mu\nu} = \sum_{s,s'} [\bar{u}(p', s') \{ \gamma^\mu \gamma_L Q_{1L} + \gamma^\mu \gamma_R Q_{1R} \} u(p, s)] \times \\ [\bar{u}(p', s') \{ \gamma^\nu \gamma_L Q_{1L} + \gamma^\nu \gamma_R Q_{1R} \} u(p, s)]^\dagger .$$

Or,

$$[\bar{u}(p', s') \{ \gamma^\nu \gamma_L Q_{1L} + \gamma^\nu \gamma_R Q_{1R} \} u(p, s)]^\dagger \\ = u(p, s)^\dagger \{ \gamma_L^\dagger \gamma^{\nu\dagger} Q_{1L} + \gamma_R^\dagger \gamma^{\nu\dagger} Q_{1R} \} \gamma^0 u(p', s') \\ = \bar{u}(p, s) \{ \gamma_R \gamma^\nu Q_{1L} + \gamma_L \gamma^\nu Q_{1R} \} u(p', s') .$$

Ici, nous avons utilisé $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ et $\{ \gamma_5, \gamma^\nu \} = 0$.

Alors

$$F_1^{\mu\nu} = \text{Tr} [(\not{p}' + m') \{ \gamma^\mu \gamma_L Q_{1L} + \gamma^\mu \gamma_R Q_{1R} \} (\not{p} + m) \{ \gamma_R \gamma^\nu Q_{1L} + \gamma_L \gamma^\nu Q_{1R} \}] .$$

(Pour le moment, on garde toutes les masses.)

$\gamma_{L,R}$ contiennent $\gamma_5 \implies$ il faut évaluer des traces contenant un γ_5 . Rappel: $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ et $\text{Tr} [\gamma^\mu] = 0$. Donc:

$$\text{Tr} [\gamma^5] = 0 ,$$

$$\text{Tr} [\gamma^5 \times \text{nombre impaire de matrices } \gamma] = 0 ,$$

$$\text{Tr} [\gamma^5 \times \text{deux matrices } \gamma] = 0 .$$

La première trace non-nulle est $\text{Tr} [\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta]$. On considère $\text{Tr} [\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3]$. On utilise les faits suivants: (i) les matrices γ anticommulent, (ii) $\gamma^{0^2} = 1$, (iii) $\gamma^{i^2} = -1$. Alors

$$\text{Tr} [\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] = \text{Tr} [i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] = -i \text{Tr} [1] = -4i .$$

Solution générale:

$$\text{Tr} [\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta] = -4i \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} , \quad \epsilon_{0123} = -1 \implies \epsilon^{0123} = +1 ,$$

où $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est un tenseur complètement antisymétrique.

Avec ces règles, on peut évaluer $F_1^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 F_1^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (Q_{1L}^2 + Q_{1R}^2) \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu] + mm' Q_{1L} Q_{1R} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\
 &\quad + \frac{1}{2} (Q_{1R}^2 - Q_{1L}^2) \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 \not{p} \gamma^\nu] \\
 &= 2 (Q_{1L}^2 + Q_{1R}^2) [p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p \cdot p' g^{\mu\nu}] + 4mm' Q_{1L} Q_{1R} g^{\mu\nu} \\
 &\quad - 2i (Q_{1R}^2 - Q_{1L}^2) \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta .
 \end{aligned}$$

On peut mettre $m' = m_{\nu_\mu} = 0 \implies$

$$\begin{aligned}
 F_1^{\mu\nu} &= 2 (Q_{1L}^2 + Q_{1R}^2) [p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p \cdot p' g^{\mu\nu}] \\
 &\quad - 2i (Q_{1R}^2 - Q_{1L}^2) \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta .
 \end{aligned}$$

On peut évaluer $F_{2\mu\nu}$ de façon similaire. Comparé à $F_1^{\mu\nu}$, la seule différence est qu'il y a une antiparticule ($\bar{\nu}_e$) dans l'état final \implies il y a un spineur $v(k, \sigma)$ (par opposition au $u(p, s)$ pour $F_1^{\mu\nu}$).

Rappel:

$$\begin{aligned}\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) &= (\not{p} + m), \\ \sum_\sigma v(k, \sigma)\bar{v}(k, \sigma) &= (\not{k} - m).\end{aligned}$$

Pour la trace, la seule différence entre les spineurs u et v est le signe du terme de masse. Mais, on peut négliger $m_{\nu_e} \implies$ il n'y a effectivement pas de différence:

$$\begin{aligned}F_{2\mu\nu} &= 2(Q_{2L}^2 + Q_{2R}^2) [k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - k \cdot k' g_{\mu\nu}] \\ &\quad - 2i(Q_{2R}^2 - Q_{2L}^2) \epsilon_{\kappa\mu\lambda\nu} k'^\kappa k^\lambda.\end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer $F_1^{\mu\nu} F_{2\mu\nu}$. Pour chaque quantité, le premier terme est symétrique en $\mu \leftrightarrow \nu$, tandis que le deuxième est antisymétrique. Pour le produit des termes antisymétriques, il nous faut

$$\epsilon_{\kappa\mu\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} = -2 \left(\delta_{\kappa}^{\alpha} \delta_{\lambda}^{\beta} - \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\kappa}^{\beta} \right) .$$

Alors,

$$\begin{aligned} F_1^{\mu\nu} F_{2\mu\nu} &= 8 \{ p \cdot k p' \cdot k' + p' \cdot k p \cdot k' \} (Q_{1L}^2 + Q_{1R}^2) (Q_{2L}^2 + Q_{2R}^2) \\ &\quad + 8 \{ p \cdot k p' \cdot k' - p' \cdot k p \cdot k' \} (Q_{1R}^2 - Q_{1L}^2) (Q_{2R}^2 - Q_{2L}^2) \\ &= 16(p \cdot k)(p' \cdot k') \{ Q_{1L}^2 Q_{2L}^2 + Q_{1R}^2 Q_{2R}^2 \} \\ &\quad + 16(p \cdot k')(p' \cdot k) \{ Q_{1L}^2 Q_{2R}^2 + Q_{1R}^2 Q_{2L}^2 \} . \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer le taux pour la désintégration du muon: $|S_{fi}|^2/T$. On fait ceci dans le référentiel au repos du μ . Il y a un facteur (1/2) pour la moyenne des spins du μ ; il y a un facteur $1/(2m_\mu)$ correspondant à $1/(2E_i)$ pour le μ :

$$d\Gamma = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{2m_\mu} \frac{1}{2} F_1^{\mu\nu} F_{2\mu\nu} \left[\frac{1}{(2\pi)^3}\right]^3 \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \frac{d^3k}{2E_k} \frac{d^3k'}{2E_{k'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i).$$

On intégrera sur les impulsions des neutrinos p' et k afin d'obtenir le spectre en fonction de l'énergie de l' e^- . $F_1^{\mu\nu} F_{2\mu\nu}$ contient des produits scalaires de p' et k : $(p \cdot k)(p' \cdot k')$ et $(p \cdot k')(p' \cdot k)$. On définit

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \frac{d^3k}{2E_k} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p' - k) p'^{\alpha} k^{\beta}.$$

où $P \equiv p - k'$. Une fois $I^{\alpha\beta}$ évalué,

$$\int \dots (p \cdot k)(p' \cdot k') = k'_{\alpha} p_{\beta} I^{\alpha\beta},$$

$$\int \dots (p \cdot k')(p' \cdot k) = (p \cdot k') g_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta}.$$

Après avoir intégré sur p' et k , $I^{\alpha\beta}$ peut dépendre seulement de $P \implies$ on écrit

$$I^{\alpha\beta} = P^\alpha P^\beta f_1(P^2) + g^{\alpha\beta} f_2(P^2) .$$

Remarque:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 = m^2) |_{p^0 > 0}$$

est invariant de Lorentz. C'est-à-dire: si $f(p)$ est invariant de Lorentz, $\int d^3 p f(p)/2E_p$ l'est aussi. Donc: on peut évaluer $I^{\alpha\beta}$ dans n'importe quel référentiel.

Choisissons un référentiel dans lequel P prend une forme simple. À cause de la fonction δ , $P = p' + k$. Dans le CM des deux neutrinos (dont les 4-impulsions sont p' et k),

$$p' = \frac{1}{2}(P^0, \vec{P}) \quad , \quad k = \frac{1}{2}(P^0, -\vec{P}) \quad \implies \quad P = (P^0, 0) .$$

Or

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta} &= P^2 f_1(P^2) + 4f_2(P^2) , \\P_\alpha P_\beta I^{\alpha\beta} &= (P^2)^2 f_1(P^2) + P^2 f_2(P^2) .\end{aligned}$$

$g_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta} = \int \dots p' \cdot k$. Mais $p'^2 = k^2 = 0 \implies p' \cdot k = P^2/2$. Donc,

$$g_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta} = \frac{P^2}{2} \frac{1}{(16\pi^2)} I(P^2) ,$$

où

$$I(P^2) = \int \frac{d^3 p'}{E_{p'}} \frac{d^3 k}{E_k} \delta^{(4)}(P - p' - k) .$$

Rappel (pgs. 123-124):

$$\int \frac{d^3 p'}{E_{p'}} \frac{d^3 k}{E_k} \delta^{(4)}(P - p' - k) = \int d\Omega_k \frac{|\vec{k}|}{(E_k + E_{p'})} .$$

Mais $E_{p'} = E_k$ dans ce référentiel et $|\vec{k}| = E_k$ (neutrino). Donc

$$I(P^2) = 2\pi$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta} = \frac{P^2}{(16\pi)} .$$

Également,

$$P_\alpha P_\beta I^{\alpha\beta} = \left(\frac{P^2}{2}\right)^2 \frac{1}{(16\pi^2)} I(P^2) = \frac{(P^2)^2}{32\pi} .$$

Ensemble, ces résultats donnent

$$I^{\alpha\beta} = \frac{1}{96\pi} [2P^\alpha P^\beta + P^2 g^{\alpha\beta}] .$$

Ceci est vrai dans n'importe quel référentiel (pas seulement celui des neutrinos).

Il faut évaluer $I^{\alpha\beta} p_\alpha k'_\beta$ et $I^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} p \cdot k'$:

$$I^{\alpha\beta} p_\alpha k'_\beta = \frac{1}{96\pi} [2P \cdot p P \cdot k' + P^2 p \cdot k'] , \quad I^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} p \cdot k' = \frac{P^2}{(16\pi)} p \cdot k' .$$

Alors

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{8m_\mu} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{6\pi} \int \frac{d^3 k'}{2E_{k'}} \{ \alpha [2P \cdot p P \cdot k' + P^2 p \cdot k'] + \beta [6P^2 p \cdot k'] \} ,$$

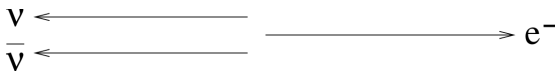
où

$$\alpha \equiv Q_{1L}^2 Q_{2L}^2 + Q_{1R}^2 Q_{2R}^2 , \quad \beta \equiv Q_{1L}^2 Q_{2R}^2 + Q_{1R}^2 Q_{2L}^2 .$$

Dans ce qui suit, on met $m_e = 0$. Mais tout peut se faire pour $m_e \neq 0$. D'abord, pour simplicité, on définit

$$x \equiv \frac{2E_{k'}}{m_\mu} .$$

L'énergie maximale de l' e^- se passe quand les deux neutrinos sont émis dans la direction opposée à celle de l' e^- :



Dans ce cas, $E_e = m_\mu/2$, i.e., $x = 1$ est la valeur maximale; la valeur minimale de x se passe quand l' e^- est au repos: $x = 2m_e/m_\mu \simeq 0$. En fonction de x ,

$$\int \frac{d^3k'}{2E_{k'}} = \frac{1}{2} \int k' dE_{k'} d\Omega_{k'} = \frac{m_\mu^2}{8} \int d\Omega_{k'} x dx .$$

Dans le référentiel au repos du muon, les produits scalaires sont

$$P \cdot k' = (p - k') \cdot k' = p \cdot k' = m_\mu E_{k'} = \frac{m_\mu^2}{2} x ,$$

$$P \cdot p = (p - k') \cdot p = m_\mu^2 - \frac{m_\mu^2}{2} x = m_\mu^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) ,$$

$$P^2 = (p - k') \cdot (p - k') = m_\mu^2 - 2p \cdot k' = m_\mu^2(1 - x) .$$

Alors,

$$2P \cdot p P \cdot k' + P^2 p \cdot k' = m_\mu^4 \frac{x}{2} (3 - 2x) ,$$

$$6P^2 p \cdot k' = 3 m_\mu^4 x (1 - x) ,$$

ce qui donne (nous effectuons l'intégrale sur $d\Omega_{k'}$)

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{3 \cdot 2^9 \pi^3} \{ \alpha [x(3 - 2x)] + \beta [6x(1 - x)] \} .$$

On remarque que les termes α et β donnent des distributions en x très différentes.

On définit

$$\rho \equiv \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} .$$

Expérimentalement, on trouve

$$\rho_{\text{exp}} = 0.752 \pm 0.003 ,$$

$$\implies \beta = 0 .$$

De plus, on peut mesurer le spin de l'électron. Nous savons de la désintégration β que $Q_{2L} \neq 0$, tandis que $Q_{2R} = 0$. C'est la même chose pour la désintégration du μ .

Donc: les seuls termes non-nuls sont $Q_{1,2L}$. On peut écrire

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi] [\bar{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi] .$$

Alors, les interactions faibles sont décrites par une interaction courant-courant dans lequel chaque courant prend la forme $V - A$. C'est la *théorie de Fermi*.

Alors, nous avons $Q_{1,2L} = 2 \implies \alpha = 16, \beta = 0$. On peut intégrer sur x dans le taux différentiel, ce qui donne

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} .$$

L'accord avec les données est excellent:

$$\tau_\mu = \Gamma^{-1} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ sec} .$$

Désintégrations du Lepton τ

On peut appliquer le résultat du μ aux désintégrations du τ . Comme le τ est plus lourd, il y a plusieurs états finaux auxquels il peut se désintégrer: $\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$, $\nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $\nu_\tau \bar{u}d$. Si on néglige les masses finales, ainsi que les corrections dues à l'interaction forte, le taux pour chaque mode est

$$\Gamma_\tau = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192 \pi^3} .$$

Pendant, on trouve que le taux total est

$$\Gamma(\tau \rightarrow \text{tout}) = 5 \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192 \pi^3} \simeq 2 \times 10^{-3} \text{ eV} ,$$

ce qui correspond à un temps de vie de $\tau_\tau \simeq 3 \times 10^{-13}$ sec. Le facteur 5 correspond à 5 états finaux: $e^- \bar{\nu}_e$, $\mu^- \bar{\nu}_\mu$ et *trois couleurs* de $\bar{u}d$.

Donc, la désintégration du τ donne une autre preuve que les quarks possèdent trois couleurs.

Problèmes avec la Théorie de Fermi

Nous avons calculé $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ dans QED: $[\sigma] = [\alpha^2/s]$.

Théorie de Fermi: on considère $\nu_\mu(p, s)e^-(k, \sigma) \rightarrow \mu^-(p', s')\nu_e(k', \sigma')$. Il implique la quantité $F_1^{\mu\nu}F_{2\mu\nu}$, qui est égale à

$$\begin{aligned} & \frac{G_F^2}{2} \sum_{\text{spins}} [\bar{u}_\mu(p', s')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u_{\nu_\mu}(p, s)] [\bar{u}_{\nu_\mu}(p, s)\gamma^\nu(1 - \gamma_5)u_\mu(p', s')] \\ & \quad \times [\bar{u}_{\nu_e}(k', \sigma')\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u_e(k, \sigma)] [\bar{u}_e(k, \sigma)\gamma_\nu(1 - \gamma_5)u_{\nu_e}(k', \sigma')] \\ & = \frac{G_F^2}{2} \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\not{p}\gamma^\nu(1 - \gamma_5)] \text{Tr} [\not{k}'\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\not{k}\gamma_\nu(1 - \gamma_5)] \\ & = \frac{G_F^2}{2} 256 p \cdot k p' \cdot k' . \end{aligned}$$

Alors, pour $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4F} \frac{1}{2} F_1^{\mu\nu} F_{2\mu\nu} \frac{|\vec{p}_{cm}^f|}{16\pi^2 W} .$$

Ici $4F$ est le flux, le facteur de $1/2$ est dû à la moyenne sur les spins de l' e^- , \vec{p}_{cm}^f et $W = \sqrt{s}$ sont l'impulsion finale et l'énergie dans le CM.

Or,

$$s = (p + k)^2 \implies p \cdot k \simeq \frac{s}{2},$$
$$s = (p' + k')^2 \implies p' \cdot k' = \frac{s}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s} \right).$$

De plus,

$$F = |\vec{p}|E_k + |\vec{k}|E_p = |\vec{p}_{cm}^i| \sqrt{s},$$

où \vec{p}_{cm}^i est l'impulsion initiale dans le CM.

On peut facilement montrer que

$$|\vec{p}_{cm}^i| = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad |\vec{p}_{cm}^f| = \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s} \right).$$

Mettant tous les morceaux ensemble et intégrant sur $d\Omega$, on obtient

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} s \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s} \right)^2.$$

Donc, σ accroît avec s : $[\sigma] = [G_F^2 s]$.

Cependant, ceci est un problème. Rappel: la matrice S a la forme

$$S = 1 - iS_{fi} ,$$

où

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i - \sum p_f)}{\sqrt{\prod 2E_{i,f}}} \mathcal{M}_{fi} .$$

La matrice S représente l'amplitude pour l'évolution d'un ensemble de particules i . (S_{fi} est l'amplitude pour que i se diffuse en un autre ensemble de particules f .) La *probabilité* totale d'évolution est 1:

$$S^\dagger S = 1 .$$

Cette équation comprend le terme $S_{fi}^\dagger S_{fi}$, qui est relié à la section efficace σ .

Mais: si σ accroît avec s , alors, pour une valeur de s suffisamment grande, la probabilité deviendra plus grande que 1. Ceci n'est clairement pas permis: c'est le *problème d'unitarité*.

Remarque: on ne rencontre pas ce problème dans QED. Ses sections efficaces *diminuent* avec l'énergie: $[\sigma] = [\alpha^2/s]$. Le fait que les sections efficaces de la théorie de Fermi accroissent avec s implique que ce n'est pas une théorie fondamentale, mais plutôt une théorie efficace. C'est-à-dire: elle s'applique à basse énergie, mais elle échoue à haute énergie.

L'amplitude \mathcal{M} pour $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e \sim (G_F/\sqrt{2})(\sqrt{s}/\pi)$. On demande que $|\mathcal{M}| < 1$ (l'analyse complète est plus compliquée) \implies

$$\sqrt{s} \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F} = 617 \text{ GeV} .$$

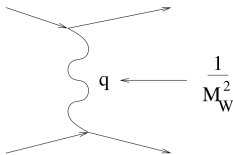
Donc, la théorie de Fermi tient pour $\sqrt{s} \ll 617 \text{ GeV}$.

\implies Si on veut une théorie fondamentale de l'interaction faible, la théorie de Fermi doit être modifiée.

Pourquoi le W ?

QED implique l'échange d'un boson de spin 1 sans masse, le photon. Donc, on modifie la théorie de Fermi: on demande que les interactions faibles soient elles aussi dues à l'échange d'un boson de spin 1. Mais, le boson (i) doit avoir une charge ± 1 et (ii) doit être massif.

Est-ce que ça aide? Oui! Interactions faibles:



Le propagateur du $W \sim 1/(q^2 - M_W^2)$. Alors, $\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e)$ est modifié par un facteur

$$\left(\frac{M_W^2}{M_W^2 - q^2} \right)^2,$$

où $q = p' - p$ (rappel: p et p' sont les 4-impulsions initiale et finale, respectivement).

À basse énergie, $q^2 \simeq 0 \implies$

$$\sigma = \sigma_{TF} .$$

À haute énergie, $q^2 \propto s \implies$

$$\sigma \sim \sigma_{TF} \frac{M_W^4}{s^2} .$$

(Il y a aussi des termes proportionnels à $\ln(1 + s/M_W^2)$ reliés à l'intégration sur θ .)

σ_{TF} est proportionnel à s . Le facteur M_W^4/s^2 fait que, maintenant, σ décroît avec s . Il semble que tout est maintenant beau. Mais...

Les Polarisationes du W

On peut considérer des processus avec des W s externes. La règle de Feynman pour un tel W est la même que pour le photon: on écrit la polarisation ϵ_μ^* . Quand on calcule la section efficace pour le processus, il faut sommer sur les spins du W . Pour les photons, on avait

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = -g^{\mu\nu} .$$

Quelle est la relation analogue pour le W ?

Si l'impulsion du W est P^μ , on peut écrire

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = Ag_{\mu\nu} + BP_\mu P_\nu ,$$

où A et B sont des fonctions de P^2 . Comme $P \cdot \epsilon = 0$, nous avons

$$P^\mu Ag_{\mu\nu} + P^\mu BP_\mu P_\nu = 0 \implies B = -\frac{A}{P^2} ,$$

$$\implies \sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = A \left[g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2} \right] .$$

On peut évaluer cette expression dans n'importe quel référentiel. Dans le référentiel au repos du W , $P^\mu = (M_W, 0, 0, 0)$. Nous avons

$$\epsilon_0^* \epsilon_0 = 0 \quad , \quad \epsilon_1^* \epsilon_1 = \epsilon_2^* \epsilon_2 = \epsilon_3^* \epsilon_3 = -A \quad .$$

Mais: dans ce référentiel, les vecteurs de polarisation prennent la forme $\epsilon^{(x)\mu} = (0, 1, 0, 0)$, $\epsilon^{(y)\mu} = (0, 0, 1, 0)$, $\epsilon^{(z)\mu} = (0, 0, 0, 1)$.

Avec ceci, on a

$$\epsilon_0^* \epsilon_0 = 0 \quad , \quad \epsilon_1^* \epsilon_1 = \epsilon_2^* \epsilon_2 = \epsilon_3^* \epsilon_3 = +1 \quad .$$

On compare les deux expressions $\implies A = -1$. Donc,

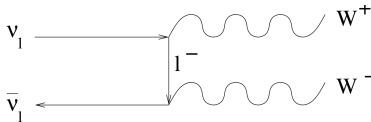
$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = - \left[g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2} \right] \quad .$$

Également, le propagateur pour un W massif s'écrit

$$iD_F^{\mu\nu}(P) = \frac{-i (g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu / M^2)}{P^2 - M^2 + i\epsilon} \quad .$$

Problèmes avec le W

Nous avons vu que la brisure d'unitarité dans $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ disparaît avec l'ajout d'un W massif. Malheureusement, ce W implique une autre brisure d'unitarité: on considère $\nu_\ell(q_1) \bar{\nu}_\ell(q_2) \rightarrow W^+(k_+) W^-(k_-)$:



L'élément de matrice pour ce processus s'écrit

$$\mathcal{M} = -\frac{iG_F M_W^2}{\sqrt{2}} \bar{\nu}(q_2) \not{\epsilon}^*(k_-) (1 - \gamma_5) \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \not{\epsilon}^*(k_+) (1 - \gamma_5) u(q_1) .$$

On suppose que le W a une 4-impulsion $p^\mu = (E, 0, 0, |\vec{p}|)$. Il y a 3 vecteurs de polarisation, 2 transverse et un longitudinal:

$$\epsilon_T^{(1)} = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad \epsilon_T^{(2)} = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad \epsilon_L = \frac{1}{M_W} (|\vec{p}|, 0, 0, E) .$$

(Le photon n'a pas de polarisation longitudinale; elle n'existe que pour des bosons de spin 1 massifs.)

Dans la limite de très hautes énergies, $\epsilon_L \gg \epsilon_T^{(1),(2)}$. De plus,

$$\epsilon_L^\mu \simeq \frac{p^\mu}{M_W} .$$

Donc, la production des W s dans $\nu_\ell \bar{\nu}_\ell \rightarrow W^+ W^-$ est dominée par des W s longitudinaux. Aussi, dans cette limite, $k_+ \simeq -P$, $k_- \simeq P$. Alors, l'amplitude pour ce processus s'écrit

$$\mathcal{M} \simeq i\sqrt{2}G_F \bar{v}(q_2) \not{P}(1 - \gamma_5) u(q_1) .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 &= 2G_F^2 \text{Tr} [\not{q}_2 \not{P}(1 - \gamma_5) \not{q}_1 (1 + \gamma_5) \not{P}] \\ &= 16G_F^2 (2q_1 \cdot P q_2 \cdot P - q_1 \cdot q_2 P^2) . \end{aligned}$$

Comme auparavant, $|\mathcal{M}|^2 \sim s^2$. À des très hautes énergies, la section efficace est

$$\sigma \simeq \frac{G_F^2 s}{3\pi} ,$$

ce qui implique une brisure de unitarité.

Donc: même si on ajoute un W massif à la théorie de Fermi, on rencontre une brisure d'unitarité, surtout quand on produit des W s longitudinaux. Afin de régler ce problème, il faut introduire d'autres nouvelles particules.

2 solutions: on ajoute (i) un lepton chargé lourd, ou (ii) un boson de spin-1 neutre (Z^0). Comme on verra prochainement, il s'avère que la Nature a choisi la 2me solution.

Théories Yang-Mills

Équation de Dirac + transformations de phase locales \implies QED. Qu'est-ce qui se passe si on applique des transformations unitaires générales? i.e.,

$$\psi \rightarrow U(x) \psi .$$

On considère l'équation de Dirac sans masse:

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi .$$

Sous cette transformation unitaire,

$$\mathcal{L} \rightarrow i \bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu U(x) \psi ,$$

\implies

$$\delta \mathcal{L} = i \bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu (\partial_\mu U(x)) \psi .$$

Donc, l'équation de Dirac n'est pas invariante sous une transformation unitaire générale.

On peut construire une théorie invariante sous U . On introduit un ensemble de champs A_μ^i :

$$A_\mu = A_\mu^i \Gamma_i .$$

Le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi .$$

(On considérera séparément le terme cinétique pour A_μ .) Sous U ,

$$\psi \rightarrow U(x) \psi \quad , \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu .$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i \bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu (U \psi) - g \bar{\psi} U^\dagger \gamma^\mu A'_\mu U \psi \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \bar{\psi} U^{-1} \gamma^\mu (\partial_\mu U) \psi - g \bar{\psi} U^{-1} \gamma^\mu A'_\mu U \psi . \end{aligned}$$

Le Lagrangien est invariant si

$$i U^{-1} (\partial_\mu U) - g U^{-1} A'_\mu U = -g A_\mu .$$

C'est-à-dire:

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} .$$

Remarque: si U est une transformation de phase locale, $U = \exp[i\alpha(x)]$,

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x) ,$$

ce qui est la transformation qu'on avait pour QED.

Champs de Jauge

Nous pouvons maintenant en déduire ce que doit être les Γ_i .

Or,

$$\begin{aligned}\text{Tr}[A'_\mu] &= \text{Tr}[UA_\mu U^{-1}] + \frac{i}{g}\text{Tr}[(\partial_\mu U)U^{-1}] \\ &= \text{Tr}[A_\mu] + \frac{i}{g}\text{Tr}[\partial_\mu(\ln U)] \\ &= \text{Tr}[A_\mu] + \frac{i}{g}\partial_\mu \text{Tr}[\ln U].\end{aligned}$$

Dernier terme: nous avons

$$(\partial_\mu U)U^{-1} = \partial_\mu(\ln U).$$

On écrit

$$U = e^{iH} \implies iH = \ln U.$$

Donc,

$$\text{Det}[U] = e^{i\text{Tr}[H]} \implies i\text{Tr}[H] = \ln(\text{Det}[U]) \implies \text{Tr}[\ln U] = \ln(\text{Det}[U]).$$

Alors, si on néglige les transformations de phase, i.e., $\text{Det}[U] = 1$ ($\text{SU}(N)$, $\text{SO}(N)$, etc.), nous avons

$$\text{Tr}[\ln U] = \ln(\text{Det}[U]) = \ln(1) = 0 \implies \partial_\mu \text{Tr}[(\ln U)] = 0 ,$$

et

$$\text{Tr}[A'_\mu] = \text{Tr}[A_\mu] .$$

\implies la transformation ne change pas la trace.

Comme $A_\mu = A_\mu^i \Gamma_i$ et $A'_\mu = A'_\mu^i \Gamma_i$, la seule façon d'avoir $\text{Tr}[A'_\mu] = \text{Tr}[A_\mu]$ est si tous les Γ_i ont la même trace et

$$\text{Tr}[\Gamma_i] = 0 .$$

Hermiticité: on suppose que les champs A_μ^i sont réels. Donc

$$\begin{aligned} A_\mu^{\prime \dagger} &= (UA_\mu U^{-1})^\dagger - \frac{i}{g} [(\partial_\mu U)U^{-1}]^\dagger \\ &= UA_\mu^\dagger U^{-1} - \frac{i}{g} U(\partial_\mu U^\dagger) . \end{aligned}$$

Mais:

$$\partial_\mu(UU^\dagger) = 0 = \partial_\mu(U)U^\dagger + U\partial_\mu(U^\dagger) .$$

\Rightarrow

$$A_\mu^{\prime \dagger} = UA_\mu^\dagger U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U)U^\dagger .$$

Donc:

$$A_\mu^{\prime \dagger} - A_\mu' = U(A_\mu^\dagger - A_\mu)U^{-1} \quad \forall A_\mu, U .$$

Ceci ne peut se produire que si

$$A_\mu^\dagger = A_\mu ,$$

\Rightarrow les Γ_i sont hermitiens.

Les Γ_i : hermitiens, sans trace \implies ils sont les *générateurs* de la symétrie.
Désormais on écrit $\Gamma_i \rightarrow T_i$, avec

$$[T_i, T_j] = ic_{ijk} T_k .$$

Les c_{ijk} sont complètement antisymétriques. Ils s'appellent les *constantes de structure* et sont différents pour des groupes différents.

Conjugué hermitien:

$$\begin{aligned} [T_j, T_i] &= -ic_{ijk}^* T_k \\ &= ic_{jik}^* T_k . \end{aligned}$$

\implies les c_{ijk} sont réels.

Il y a autant de *champs de jauge* A_μ^i qu'il y a générateurs. Les champs se trouvent donc dans la représentation *adjointe* du groupe.

Terme Cinétique pour A_μ

QED:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Mais: sous une transformation de jauge,

$$A'_\nu = UA_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1} ,$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &\rightarrow (\partial_\mu U)A_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu A_\nu)U^{-1} + UA_\nu(\partial_\mu U^{-1}) \\ &+ \frac{i}{g}(\partial_\mu \partial_\nu U)U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) . \end{aligned}$$

Pas invariant de jauge.

On essaie (avec $\text{Tr}[T_i, T_j] = \delta_{ij}/2$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}F^{i\mu\nu}F_{\mu\nu}^i .$$

Si $F^{\mu\nu} \rightarrow UF^{\mu\nu}U^{-1}$ sous une transformation de jauge, ça fonctionnera (à cause de la trace). Comment le faire?

Rappel: la dérivée covariante

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu .$$

Comment se transforme-t-elle sous une transformation de jauge?

Nous avons

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow \bar{\psi}U^{-1}\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu U\psi .$$

Mais on remarque que

$$\begin{aligned} U\mathcal{D}_\mu U^{-1} &= U(\partial_\mu + igA_\mu)U^{-1} \\ &= \partial_\mu + U(\partial_\mu U^{-1}) + igUA_\mu U^{-1} \\ &= \partial_\mu - (\partial_\mu U)U^{-1} + igUA_\mu U^{-1} \\ &= \partial_\mu + igA'_\mu = \mathcal{D}'_\mu . \end{aligned}$$

Donc

$$U^{-1}\mathcal{D}'_\mu U = \mathcal{D}_\mu$$

et

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi$$

⇒ invariant de jauge.

Avec ceci en tête, on essaie un nouveau terme cinétique pour A_μ . On définit

$$F_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_\mu A_\nu - \mathcal{D}_\nu A_\mu .$$

Sous une transformation de jauge,

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \mathcal{D}'_\mu A'_\nu - \mathcal{D}'_\nu A'_\mu \\ &= (\partial_\mu + igA'_\mu)A'_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \left(\partial_\mu + ig \left[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \right] \right) \left[UA_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1} \right] - (\mu \leftrightarrow \nu) . \end{aligned}$$

On multiplie tous les termes, on utilise la dérivée en chaîne:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= (\partial_\mu U) A_\nu U^{-1} + U (\partial_\mu A_\nu) U^{-1} + UA_\nu (\partial_\mu U^{-1}) + \frac{i}{g} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^{-1} \\ &+ \frac{i}{g} (\partial_\nu U) (\partial_\mu U^{-1}) + igU (A_\mu A_\nu) U^{-1} - UA_\mu U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} \\ &- (\partial_\mu U) A_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) . \end{aligned}$$

Les 1^{er} et 8^{me} termes s'annulent.

Pour les 7^{me} et 9^{me} termes, on utilise $(\partial_\nu U) U^{-1} = -U (\partial_\nu U^{-1})$. On obtient

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= U(\partial_\mu A_\nu) U^{-1} + igU(A_\mu A_\nu) U^{-1} + UA_\nu (\partial_\mu U^{-1}) \\ &+ \frac{i}{g} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu U) (\partial_\mu U^{-1}) + UA_\mu (\partial_\nu U^{-1}) \\ &+ \frac{i}{g} (\partial_\mu U) (\partial_\nu U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) . \end{aligned}$$

Les termes 3 à 7 sont symétriques en μ et $\nu \implies$ ils disparaissent quand on soustrait les termes en $(\mu \leftrightarrow \nu)$. Ce qui reste est

$$F'_{\mu\nu} = U[\partial_\mu + igA_\mu] A_\nu U^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) = UF_{\mu\nu} U^{-1} ,$$

comme espéré.

On a un Lagrangien invariant de jauge!

Résumé

Nous avons construit un Lagrangien qui est invariant sous des transformations unitaires *locales* (SU(N), SO(N), etc.). Nous avons dû introduire des champs de jauge dont le nombre est égal au nombre de générateurs du groupe.

Le Lagrangien Yang-Mills s'écrit

$$\mathcal{L}_{YM} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] ,$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu &= \partial_\mu + igA_\mu \\ A_\mu &= A_\mu^i\Gamma_i \\ F_{\mu\nu} &= \mathcal{D}_\mu A_\nu - \mathcal{D}_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] .\end{aligned}$$

Remarque: il y a des termes cubiques et quartiques (auto-interactions) impliquant les A_μ . Ce sont des propriétés particulières des champs Yang-Mills.

Important: un terme de masse d'un champ de jauge A_μ est donné par

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu .$$

Ceci brise l'invariance de jauge. Donc: une théorie ayant une symétrie décrite par les U s comprend des bosons de jauge sans masse.

Un exemple est la QED, qui est invariante sous des transformations de phase locales, $U = \exp[i\alpha(x)]$. C'est une théorie Yang-Mills avec groupe de symétrie $U(1)$. Comme requis, le photon a une masse nulle.

Un autre exemple est la QCD, qui décrit la force forte. Elle est une théorie Yang-Mills basée sur le groupe $SU(3)$. Les 8 gluons sont de masse nulle. On examinera la QCD à partir de la prochaine page.

Pour la force faible, les W^\pm et Z^0 sont massifs. Afin de générer des masses pour les bosons de jauge, il faut *briser* la symétrie. Nous reviendrons sur ce point un peu plus tard.

La Force Forte: QCD

Force forte: décrite par une théorie Yang-Mills basée sur le groupe $SU(3)_C$ (pas brisé). C'est la Chromodynamique Quantique (QCD). Le groupe $SU(N)$ a $N^2 - 1$ générateurs, donc $SU(3)_C$ a 8 générateurs $\implies \exists$ 8 bosons de jauge sans masse, les *gluons*.

Représentations de $SU(3)$: Rappel: pour $SU(2)$, on a des irreps (représentations irréductibles et non-équivalentes) de dimension **1, 2, 3, 4, ...** Elles correspondent au spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ (il y a $2s + 1$ composantes). Dans $SU(3)$, les irreps n'ont pas toutes les dimensions: **1, 3, 6, 8, 10, ...** Il y a aussi les conjugués de certaines irreps: **$\bar{3}, \bar{6}, \bar{10}, \dots$**

Les gluons sont dans l'irrep adjointe de $SU(3)_C$, **8**. Les gluons couplent à la couleur (le nombre quantique associé à $SU(3)_C$) et seulement les quarks ressentent la force forte. Les quarks et antiquarks sont dans le **3** et **$\bar{3}$** , respectivement \implies il y a trois couleurs.

Comment est-ce qu'on sait qu'il y a trois couleurs?

Dans notre étude de $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$, nous avons défini

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{\text{types de quarks}} Q_q^2.$$

Pour $E < 2.6$ GeV, où seulement le u ($Q_{em} = 2/3$), d ($-1/3$) et s ($-1/3$) sont accessibles cinématiquement, on trouve $R = 2$. Comme $Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 = \frac{2}{3}$, on déduit qu'il y a 3 couleurs pour les quarks, alors $R = (2/3) \times 3 = 2$.

En fait, il y a d'autres indications que la couleur est présente. E.g., le baryon Δ^{++} a $Q = 2$ et spin $3/2 \implies$ il est composé de 3 quarks u , tous avec spin $|+\rangle$. Mais: l'état de trois fermions identiques doit être antisymétrique! Comment expliquer le Δ^{++} ? Si les quarks possèdent 3 couleurs, on peut rendre l'état de couleur antisymétrique, tout en gardant saveur et spin symétrique.

Aussi, le π^0 se désintègre en deux photons. En fonction des diagrammes de Feynman, c'est décrit comme une boucle avec des quarks internes. Si on ignore la couleur, le calcul théorique ne donne que $1/3$ de l'amplitude mesurée. Si on rajoute la couleur, ça fonctionne.

Rappel: la force électromagnétique: constante de couplage $e = 0.3 \implies \alpha = 1/137$ (perturbatif). Classique:

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}$$

\implies la force diminue lorsque la distance augmente.

La force forte: constante de couplage $g_s \simeq 3.5 \implies \alpha_s = g_s^2/4\pi \simeq 1$ (non-perturbatif) \implies

$$F \sim C_1 C_2 r$$

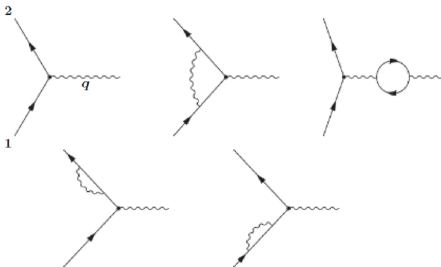
\implies la force augmente lorsque la distance augmente \implies on ne peut pas séparer des particules liées par la force forte (confinement). Tout ce qu'on observe est neutre en couleur.

Or, neutre en couleur veut dire un singulet sous $SU(3)_C$. Quelles combinaisons de q et \bar{q} ($\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)_C$) contiennent un singulet? \implies il faut savoir comment combiner les irreps de $SU(3)_C$. On a

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad , \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \quad , \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad .$$

On voit que $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ et $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ contiennent un singulet. Alors, les états physiques sont $q\bar{q}$ (mésons, tels que π , K , etc.) et qqq (baryons, tels que p et n , Ξ , etc.)

Retour à la QED. Tous les processus qu'on a examinés étaient au plus bas ordre ("niveau des arbres"). Mais il y a des corrections d'ordre supérieur, des boucles.

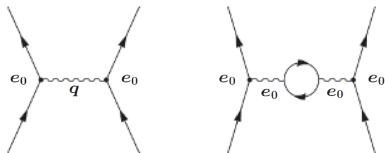


Tous ces diagrammes divergent, de façon logarithmique. On tient compte de ces divergences comme suit. Pour le Lagrangien de la QED, on écrit

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - e_0j^\mu A_\mu .$$

Remarque: on l'écrit avec des paramètres "nus" m_0 et e_0 , qui sont différents des paramètres physiques (mesurés) m et e .

La QED est renormalisable \implies (i) les infinités apparaissent seulement dans les relations entre paramètres nus et physiques et (ii) quand on exprime les observables en terme de m et e , ils sont finis à tous les ordres dans la théorie des perturbations.



On considère la diffusion $2 \rightarrow 2$. À gauche, on voit le diagramme au plus bas ordre, suivi d'un diagramme avec une boucle. Le deuxième diagramme est divergent, mais l'infinité disparaît quand on change $e_0 \rightarrow e$.

Cependant, il reste une correction finie et cette correction dépend de la valeur du transfert de l'impulsion. C'est-à-dire, la valeur de e , et donc α , dépend de l'énergie à laquelle on fait la mesure. Alors, la constante de structure fine n'est pas constante!

On a

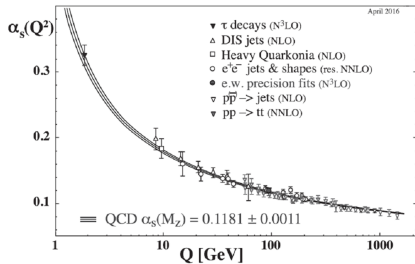
$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha(Q_0^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}} \implies \frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{\alpha(Q_0^2)} - \frac{1}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}.$$

Alors, α augmente lorsque l'énergie augmente, de façon logarithmique. À $Q^2 = Q_0^2 \simeq 0$ (basse énergie), $\alpha = 1/137$. Mais à $Q^2 = M_Z^2$ ($M_Z \simeq 90$ GeV), $\alpha = 1/128$.

L'évolution de α avec l'énergie est décrite par le groupe de renormalisation:

$$\frac{d\alpha(Q^2)}{d \ln Q^2} = \beta(q^2) = \frac{1}{3\pi} \alpha^2(Q^2) + O(\alpha^3).$$

Le même raisonnement s'applique à $\alpha_s \implies$ sa valeur change avec l'énergie, $\alpha_s(Q^2)$. Cependant, pour des groupes non-abéliens, la fonction $\beta(q^2)$ change de signe \implies la valeur de α_s *diminue* lorsque l'énergie augmente:



À basse énergie, la force forte est non-perturbative. Cependant, à des énergies plus hautes, elle devient perturbative. De plus, les quarks sont confinés à basse énergie, mais ils ne sont pas à haute énergie. C'est la *liberté asymptotique*.

Brisure Spontanée de Symétrie

Théorie scalaire ϕ^4 :

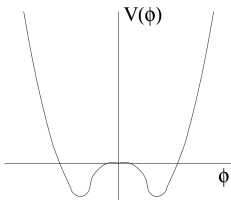
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

Le minimum du potentiel est à $\phi = 0$ et le Lagrangien possède la symétrie discrète $\phi \rightarrow -\phi$.

On suppose maintenant que le terme de masse a le “mauvais” signe:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

Le Lagrangien possède encore la symétrie discrète $\phi \rightarrow -\phi$. Mais: le potentiel $V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ prend la forme



L'état fondamental se trouve à un des minima, ce qui *brise* la symétrie $\phi \rightarrow -\phi$. Ceci est un cas typique où la symétrie du Lagrangien est brisée par le vide.

Mettons que l'état fondamental est à droite:

$$\phi_0 = +\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} .$$

Nous pouvons faire un développement du champ ϕ autour de sa valeur minimale:

$$\phi = \phi_0 + \eta .$$

Maintenant,

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi_0 + \eta)^4 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_0 + \eta)^2 = \left[\frac{3}{2}\lambda\phi_0^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \right] \eta^2 + \text{termes } \eta^3, \eta^4 ,$$

où nous avons laissé tomber le terme constant.

Le coefficient de η^2 est μ^2 . Donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 + \text{termes } \eta^3, \eta^4 .$$

Le champ η a *acquis* une masse $2\mu^2$.

Symétries Globales Continues

On considère une théorie scalaire possédant une symétrie $O(N)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)(\partial^\mu \phi^i) + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4}\lambda(\phi^i \phi^i)^2 ,$$

ϕ^i ($i = 1, \dots, N$). On brise la symétrie comme auparavant. L'état fondamental satisfait à $\phi^i \phi^i = \mu^2/\lambda$, i.e., il y a un continuum d'états fondamentaux dégénérés (correspondant à la symétrie $O(N)$).

On peut choisir la direction dans laquelle $\langle \phi^i \rangle \neq 0$. Mettons que

$$\langle \phi^1 \rangle = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} ; \quad \langle \phi^i \rangle = 0 , \quad i = 2, \dots, N .$$

On définit

$$\phi^1 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \eta^1 , \quad \phi^i = \eta^i \quad (i = 2, \dots, N) .$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)(\partial^\mu \phi^i) + \frac{1}{2}\mu^2 \left[(\phi_0 + \eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + \dots + (\eta^N)^2 \right] \\ & - \frac{1}{4}\lambda \left[(\phi_0 + \eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + \dots + (\eta^N)^2 \right]^2 . \end{aligned}$$

Termes de masse: nous avons

$$\left[\frac{-\mu^2}{2} + \frac{3}{2} \lambda \phi_0^2 \right] (\eta^1)^2 = \frac{1}{2} (2\mu^2) (\eta^1)^2 ,$$
$$\left[\frac{-\mu^2}{2} + \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2 \right] (\eta^i)^2 = 0 \quad (i = 2, \dots, N) .$$

Donc, le η^1 acquiert une masse $2\mu^2$, tandis que η^2, \dots, η^N restent sans masse. Donc, la symétrie est brisée de $O(N)$ à $O(N-1)$.

$O(3)$: rotations en 3 dimensions. La procédure ci-haut brise $O(3)$ à $O(2)$, qui correspond à des rotations autour d'un axe. Donc, on brise 2 symétries et il y a 2 bosons sans masse. Ceci est le théorème de Goldstone: à chaque symétrie globale brisée de façon spontanée correspond un boson scalaire sans masse (boson de Goldstone).

Cas général: $O(N)$ a $N(N-1)/2$ générateurs; $O(N-1)$ en a $(N-1)(N-2)/2$. Donc, on brise $N(N-1)/2 - (N-1)(N-2)/2 = (N-1)$ générateurs de façon spontanée et il y a $(N-1)$ bosons scalaires sans masse.

Symétries Locales Continues

Modèle de Higgs: un champ scalaire complexe ϕ :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 .$$

Le minimum du potentiel est à

$$\langle \phi^\dagger \phi \rangle_0 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv \frac{v^2}{2} , \quad \text{ou } \langle \phi \rangle_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} .$$

v est la valeur du vide (ou vev). Écrit de cette façon, c'est $\text{Re}\phi$ qui obtient le vev.

On ajoute l'électromagnétisme (symétrie $U(1)$ locale). On a

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu , \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \end{aligned}$$

Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \{(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi\}^\dagger \{(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi\} - V(\phi) .$$

Quand ϕ acquiert un vev, un terme généré est

$$(-ieA_\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} (ieA^\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu = \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu .$$

Donc: un degré de liberté du boson de Higgs est combiné avec le champ vectoriel A_μ sans masse pour produire un champ vectoriel *massif*, de masse $m = ev$. Ceci est le *mécanisme de Higgs*; ça arrive quand on brise une symétrie de jauge locale de façon spontanée.

Plus explicitement: on développe les champs autour de leurs vevs:

$$\text{Re}\phi = \frac{v + \eta^1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{Im}\phi = \eta^2 \quad .$$

Par contre, ce n'est pas idéal parce qu'on obtient des termes croisés dans le Lagrangien.

On peut faire mieux. On écrit

$$\phi = \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} e^{i\xi/v} \quad ,$$

où η et ξ sont les champs. Nous avons $\langle \eta \rangle = \langle \xi \rangle = 0 \implies \langle \phi \rangle = v/\sqrt{2}$.

Maintenant,

$$\partial_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \eta e^{i\xi/v} + \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \frac{i}{v} \partial_\mu \xi e^{i\xi/v} \quad ,$$

\implies

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \text{pas de termes croisés} + \dots$$

Mais: même ceci n'est pas parfait. Avec cette paramétrisation, il y a apparemment deux champs scalaires. Mais on sait qu'un champ est *mangé* par le A_μ afin de former un champ vectoriel massif. Donc: on utilise notre liberté de jauge afin d'éliminer le degré de liberté ξ :

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \tilde{\phi} = e^{-i\xi/v} \phi = \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{i}{e} \left(\frac{-i}{v} \partial_\mu \xi \right) = A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi.\end{aligned}$$

Le champ ξ a disparu de ϕ , mais apparaît dans A_μ . Le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - V(\eta) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{2} (v + \eta)^2 A_\mu A^\mu.$$

Le dernier terme contient la masse du A_μ , ainsi que les couplages η - A - A et η - η - A - A . Le η est massif: $m_\eta^2 = 2\mu^2$.

Donc: à partir d'une théorie avec 2 champs scalaires (un massif, un sans masse) et 2 composantes d'un champ vectoriel sans masse, on retrouve une théorie avec un champ de Higgs massif et 3 composantes d'un champ vectoriel massif.

Modèle Georgi-Glashow

La symétrie est $SU(2)$, le Higgs est un triplet. Le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{i\mu\nu}F_{\mu\nu}^i + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\phi^i)(\mathcal{D}^\mu\phi^i) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^i\phi^i - \frac{1}{4}\lambda(\phi^i\phi^i)^2,$$

où

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - g\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k.$$

La dérivée covariante: $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igT^i A_\mu^i$, où $(T^i)_{mn} = i\epsilon_{min} \implies$
 $(\mathcal{D}_\mu)_{mn} = \partial_\mu\delta_{mn} - g\epsilon_{min}A_\mu^i$. Donc,

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_\mu\phi)^i(\mathcal{D}^\mu\phi)^i &= (\partial_\mu\phi^i)(\partial^\mu\phi^i) - 2g\epsilon_{min}\phi^n A_\mu^i\partial^\mu\phi^m \\ &\quad + g^2(\epsilon_{min}\phi^n A_\mu^i)(\epsilon_{mjp}\phi^p A^{\mu j}).\end{aligned}$$

Quoique correct, ceci est très compliqué. On aimerait éliminer les termes qui mélangent les champs de Higgs et de jauge. On adopte la procédure suivante. D'abord, on choisit une direction pour le vev:

$$\langle\phi^i\rangle = v\delta^{i3}.$$

Les termes de masse pour le boson vectoriel viennent de

$$\begin{aligned}g^2 v^2 \epsilon_{mi3} \epsilon_{mj3} A_\mu^i A^{\mu j} &= g^2 v^2 (\delta_{ij} \delta_{33} - \delta_{i3} \delta_{j3}) A_\mu^i A^{\mu j} \\ &= g^2 v^2 (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2}) A_\mu^i A^{\mu j} \\ &= g^2 v^2 [A_\mu^1 A^{\mu 1} + A_\mu^2 A^{\mu 2}] .\end{aligned}$$

Donc: A_μ^1 et A_μ^2 sont massifs, avec $m = gv$, mais A_μ^3 demeure sans masse, comme $SO(3) \rightarrow SO(2)$. Ici, $SU(2) \rightarrow U(1)$ (les groupes sont isomorphes).

On écrit le champ de Higgs comme suit:

$$\phi = e^{(i/v)(\xi^1 T^1 + \xi^2 T^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} ,$$

avec $\langle \xi^1 \rangle = \langle \xi^2 \rangle = \langle \eta \rangle = 0$.

On re-exprime

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = U\phi ,$$

où

$$U = e^{-(i/v)(\xi^1 T^1 + \xi^2 T^2)} .$$

Alors

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} ,$$
$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} .$$

Donc (on laisse tomber les tildes),

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^i (\mathcal{D}^\mu \phi)^i = (\partial_\mu \phi^i) (\partial^\mu \phi^i) + g^2 (v + \eta)^2 (A_\mu^1 A^{\mu 1} + A_\mu^2 A^{\mu 2}) .$$

On remarque que le terme $-2g\epsilon_{min}\phi^n A_\mu^i \partial^\mu \phi^m$ disparaît car $\phi^n = \phi^m \sim \phi^3$.

Il est utile de définir le champ vectoriel chargé:

$$A_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\mu}^1 \mp iA_{\mu}^2) .$$

Le terme de masse est

$$g^2(v + \eta)^2 A_{\mu}^+ A^{\mu-} + h.c.$$

Variation: le Higgs est un doublet complexe (sous $SU(2)$):

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} .$$

On choisit la direction du vev telle que

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

La dérivée covariante prend la forme

$$\mathcal{D}_{\mu}\phi = \left[\partial_{\mu} + ig \left(A_{\mu}^i \frac{\tau^i}{2} \right) \right] \phi = \left[\partial_{\mu} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} A_{\mu}^3 & A_{\mu}^1 - iA_{\mu}^2 \\ A_{\mu}^1 + iA_{\mu}^2 & -A_{\mu}^3 \end{pmatrix} \right] \phi .$$

Le terme de masse vient de $(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g^2 v^2}{4} \begin{pmatrix} A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ -A_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g^2 v^2}{4} \left[A_\mu^1{}^2 + A_\mu^2{}^2 + A_\mu^3{}^2 \right]. \end{aligned}$$

On observe que chacun des A_μ^i acquiert une masse, avec $m = gv/2$. Ici, $SU(2)$ est brisé complètement.

Remarque: on peut éliminer les termes de mélange $A-\phi$ dans $(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)$ avec une transformation de jauge. On écrit

$$\phi = e^{(i/v)(\vec{\xi} \cdot \vec{\tau}/2)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

On élimine le facteur exponentiel avec une transformation de jauge. Ceci enlève les termes de mélange $A-\phi$ dans $(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)$.

Théorie Électrofaible $SU(2) \times U(1)$

On peut maintenant examiner la théorie qui “unifie” les forces électromagnétique et faible. Remarque: ce n'est pas une vraie unification car les deux groupes ont des constantes de couplage différentes. Quand même, on traite les deux forces dans un même cadre mathématique.

Structure de jauge: cette théorie est basée sur le groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Il y a 4 champs de jauge: on associe les W_μ^i ($i = 1, 2, 3$) à $SU(2)_L$, tandis que B_μ est le champ de jauge de $U(1)_Y$. Les W_μ^i et B_μ couplent aux charges I_{3W} et $Y_W/2$, respectivement.

La charge électrique est définie comme

$$Q_{em} = I_{3W} + \frac{1}{2} Y_W .$$

La dérivée covariante pour cette théorie est

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^i T^i + ig' \frac{Y_W}{2} B_\mu .$$

Remarque: QED a un photon, tandis que la théorie de Fermi implique l'existence du W^\pm . La théorie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ contient un deuxième boson de jauge neutre, le Z^0 . C'est une *prédiction* de cette théorie. Elle a été confirmée quand le Z^0 a été découverte au CERN en 1980.

On place des fermions LH dans des doublets de $SU(2)_L$; les fermions RH sont des singulets sous $SU(2)_L$. Remarque: $Y_W/2$ est différent pour des composantes LH et RH des particules:

	Q_{em}	I_{3W}	$Y_W/2$
ν_{eL}	0	1/2	-1/2
e_L^-	-1	-1/2	-1/2
e_R^-	-1	0	-1
u_L	2/3	1/2	1/6
u_R	2/3	0	2/3
d_L	-1/3	-1/2	1/6
d_R	-1/3	0	-1/3

Le Lagrangien pour cette théorie s'écrit

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \not{D}\psi_L + i\bar{\psi}_R \not{D}\psi_R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} ,$$

où

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k ; \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu .$$

Remarque: il n'y a pas de termes de masse pour les fermions:

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) .$$

Mais ceci viole la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ parce que les ψ_L sont des doublets de $SU(2)_L$, tandis que ψ_R sont des singulets.

Au lieu, on ajoute des interactions Yukawa au Lagrangien:

$$\mathcal{L}_Y(\psi, \phi) = -g_Y [\bar{\psi}_L \phi \psi_R + \bar{\psi}_R \phi^\dagger \psi_L] .$$

Les nombres quantiques du champ de Higgs ϕ sont tels que $\mathcal{L}_Y(\psi, \phi)$ est invariant sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$. (e.g., ϕ est un doublet sous $SU(2)_L$.) Lorsque ϕ acquiert un vev, la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est brisée et les fermions acquièrent une masse $g_Y v / \sqrt{2}$.

Brisure de la Symétrie $SU(2) \times U(1)$

Afin de briser $SU(2)_L \times U(1)_Y$ par le mécanisme de Higgs, on introduit un champs ϕ qui est un doublet de $SU(2)_L$ avec $Y_W = +1$:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} .$$

Pour ne pas briser l'électromagnétisme, la composante ϕ^0 acquiert un vev \implies on ajoute un terme $-V(\phi)$ au Lagrangien de sorte que

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Incluant le terme cinétique pour ϕ , le Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - V(\phi) + \mathcal{L}_Y(\psi, \phi) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_L \not{D} \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{D} \psi_R , \end{aligned}$$

où

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 , \quad \langle \phi^\dagger \phi \rangle = \frac{v^2}{2} .$$

Masses des Bosons de Jauge

On choisit une jauge de sorte que

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Avec $T^i = \sigma^i/2$ et $Y_W = +1$ pour le champs de Higgs, nous avons

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \left[\partial_\mu + ig \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + ig' \frac{1}{2} B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Termes de masse pour les bosons de jauge: $\left[(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) \right]_{\text{masse}}$:

$$\begin{aligned} & (0 \quad v/\sqrt{2}) \left[-ig \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - ig' \frac{1}{2} B_\mu \right] \times \\ & \left[ig \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + ig' \frac{1}{2} B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ & = \frac{v^2}{2} \frac{g^2}{4} [W_\mu^1 W^{\mu 1} + W_\mu^2 W^{\mu 2}] + \frac{1}{4} \frac{v^2}{2} [gW_\mu^3 - g' B_\mu] [gW^{\mu 3} - g' B^\mu] . \end{aligned}$$

(1) Nous avons

$$W_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu}^1 \mp iW_{\mu}^2) \implies [W_{\mu}^1 W^{\mu 1} + W_{\mu}^2 W^{\mu 2}] = [W_{\mu}^{+2} + W_{\mu}^{-2}] .$$

Donc, lors de la brisure de la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$, on génère une masse pour les W s chargés:

$$\frac{M_W^2}{2} = \frac{v^2}{2} \frac{g^2}{4} \implies M_W = \frac{gv}{2} .$$

(2) On définit

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} , \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

et

$$\begin{aligned} Z_{\mu} &= W_{\mu}^3 \cos \theta_W - B_{\mu} \sin \theta_W , \\ A_{\mu} &= W_{\mu}^3 \sin \theta_W + B_{\mu} \cos \theta_W . \end{aligned}$$

Le Z^0 acquiert une masse:

$$\left[(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi) \right]_{\text{masse}} = \frac{1}{2} M_W^2 \left[W_\mu^{+2} + W_\mu^{-2} \right] + \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu .$$

Nous avons

$$M_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2) = \sec^2 \theta_W M_W^2 \implies M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} .$$

Donc, $M_Z > M_W$.

Cependant, $M_A = 0$, i.e., le photon (A_μ) demeure sans masse. La symétrie n'est donc que partiellement brisée: $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$.

Interactions des Fermions

Interactions des fermions viennent du terme $i\bar{\psi}\not{D}\psi$ dans le Lagrangien:

$$i\bar{\psi}\not{D}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + igW_\mu^i T^i + ig' \frac{Y_W}{2} B_\mu \right) \psi .$$

Il y a donc des interactions de courant chargé impliquant le W^\pm et des interactions de courant neutre impliquant le W_3 et B (ou γ et Z^0). On examinera les deux types d'interaction.

Courants chargés: Rappel: les composantes LH des particules sont des doublets de $SU(2)_L$, tandis que les composantes RH sont des singulets. Donc, les courants chargés n'impliquent que la composante LH des fermions. E.g. courant chargé $\bar{\nu}-e$:

$$i (\bar{\nu} \ 0) \gamma^\mu \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} \dots & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ e^- \end{pmatrix} .$$

Comme $W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)$, on peut écrire

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu W_\mu^+ (1 - \gamma_5)e^- + h.c.] .$$

Si on compare avec la théorie de Fermi, on trouve

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} .$$

Mais $G_F = 1.166 \times 10^{-5}(\text{GeV})^{-2} \implies v = 246 \text{ GeV}$.

Courants neutres: L'interaction entre les fermions et les bosons neutres est

$$i\bar{\psi} \left(ig\mathcal{W}^3 T^3 + ig' \frac{Y_W}{2} \mathcal{B} \right) \psi .$$

1. Nous avons exprimé Z_μ et A_μ en fonction de W_μ^3 et B_μ . On peut inverser ces relations:

$$\begin{aligned} W_\mu^3 &= Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W , \\ B_\mu &= -Z_\mu \sin \theta_W + A_\mu \cos \theta_W . \end{aligned}$$

2. On exprime g et g' en fonction de θ_W .

3. On a $T^3\psi = I_{3W}\psi$.

4. On exprime $Y_W/2$ en fonction de Q_{em} et I_{3W} .

Mettant tout ensemble, on obtient

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi} \left(ig\mathcal{W}^3 T^3 + ig' \frac{Y_W}{2} \mathcal{B} \right) \psi &= -\sqrt{g^2 + g'^2} \bar{\psi} \left[\cos \theta_W (\mathcal{Z} \cos \theta_W + \mathcal{A} \sin \theta_W) I_{3W} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \theta_W (-\mathcal{Z} \sin \theta_W + \mathcal{A} \cos \theta_W) (Q_{em} - I_{3W}) \right] \psi \\
 &= -\sqrt{g^2 + g'^2} \bar{\psi} \left[Q_{em} \sin \theta_W \cos \theta_W \mathcal{A} + (I_{3W} - Q_{em} \sin^2 \theta_W) \mathcal{Z} \right] \psi .
 \end{aligned}$$

Il y a des couplages des fermions au photon et au Z^0 . Pour le photon, la comparaison de cette expression avec QED nous permet d'identifier

$$e = \sqrt{g^2 + g'^2} \sin \theta_W \cos \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W .$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
 \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta_W} \implies \\
 M_W &= \left(\frac{e^2 \sqrt{2}}{8G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W} = \frac{37.3 \text{ GeV}}{\sin \theta_W} , \quad M_Z = \frac{37.3 \text{ GeV}}{\sin \theta_W \cos \theta_W} .
 \end{aligned}$$

Le W et le Z^0 ont été détectés directement au CERN. Les dernières données: $M_W = 80.4 \text{ GeV}$, $M_Z = 91.2 \text{ GeV}$. Alors, $\sin^2 \theta_W \simeq 0.22$.

Le couplage du Z^0 implique le facteur $I_{3W} - Q_{em} \sin^2 \theta_W$. Comme les composantes LH des fermions ont des différentes valeurs de I_{3W} que les composantes RH, le Z^0 a des couplages aux fermions LH et RH, mais avec des forces différentes.

Comme la théorie de Fermi, on peut écrire une interaction efficace à 4 fermions, applicable aux courants neutres à basse énergie:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{NC}} = -\frac{g^2 + g'^2}{M_Z^2} \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (I_{3W} - Q_{em} \sin^2 \theta_W) \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma_\mu (I_{3W} - Q_{em} \sin^2 \theta_W) \psi_2 .$$

(Remarque: $(g^2 + g'^2)/M_Z^2 = 8G_F/\sqrt{2}$.) On note que le courant chargé (la théorie de Fermi) implique un couplage purement LH $[(V - A) \times (V - A)]$. Cependant, comme le Z^0 couple aux particules LH et RH, cette interaction à 4 fermions a quatre parties: LL, LR, RL et RR.

Courants Neutres: DIS

Diffusion Profonde Inélastique: Même avant la découverte du Z^0 au CERN, il y avait des indices qu'un courant neutre était présent. Voici un exemple: diffusion profonde inélastique (DIS) (observé en 1973).

DIS implique la diffusion des leptons des noyaux. Ici on considère la diffusion des neutrinos. On compare les rapports des sections efficaces de diffusion du courant neutre et du courant chargé:

$$R_\nu \equiv \frac{\sigma(\nu_\mu A \rightarrow \nu_\mu A')}{\sigma(\nu_\mu A \rightarrow \mu^- A'')} , \quad R_{\bar{\nu}} \equiv \frac{\sigma(\bar{\nu}_\mu A \rightarrow \bar{\nu}_\mu A')}{\sigma(\bar{\nu}_\mu A \rightarrow \mu^+ A'')} .$$

Le fait qu'on a observé $\nu_\mu A \rightarrow \nu_\mu A' \implies$ l'existence du Z^0 – un boson de jauge neutre qui couple aux neutrinos – bien avant sa découverte.

On considère des noyaux d'isospin zero (i.e., le nombre de neutrons et protons égale $\implies \#u = \#d$). Pour simplifier, on néglige tous les antiquarks dans le noyau. Les rapports s'écrivent

$$R_\nu \equiv \frac{\sigma(\nu_\mu u \rightarrow \nu_\mu u) + \sigma(\nu_\mu d \rightarrow \nu_\mu d)}{\sigma(\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u)},$$

$$R_{\bar{\nu}} \equiv \frac{\sigma(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \bar{\nu}_\mu u) + \sigma(\bar{\nu}_\mu d \rightarrow \bar{\nu}_\mu d)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d)}.$$

On verra que $R_\nu \neq R_{\bar{\nu}}$. La raison est que le Z^0 a des couplages LR et RL, tandis que le couplage du W est purement LL. L'importance de ce fait se voit comme suit. On considère une diffusion du courant chargé:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi(p) \bar{\psi}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi(k).$$

$$\implies \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 128 G_F^2 (p \cdot k)(p' \cdot k').$$

On suppose maintenant que le courant chargé ait la forme LR:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi(p) \bar{\psi}(k') \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi(k) .$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 128 G_F^2 (p \cdot k') (p' \cdot k) .$$

Dans le CM, les produits scalaires s'écrivent

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|_{LL}^2 = 8 G_F^2 (2s)^2 , \quad \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|_{LR}^2 = 8 G_F^2 (s(1 + \cos \theta))^2 .$$

On intègre sur θ : $\sigma_{LL} = \sigma_0$, $\sigma_{LR} = \sigma_0/3$.

Autre point: la section efficace pour le processus du courant chargé $\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$ est σ_0 . Mais le processus de courant chargé $\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d$ a des *antiparticules* dans l'état initial et final. Au niveau calcul, on néglige toutes les masses. Donc, la seule différence est l'échange $u(p)$ (1^{er} processus) $\leftrightarrow \bar{v}(p')$ (2^{me} processus). Résultat: l'échange $p \leftrightarrow p'$. Donc, quand on considère la diffusion d'*antineutrinos*, le courant chargé LL agit comme un couplage LR. La section efficace dans ce cas est $\sigma_0/3$.

Le neutrino n'a pas de charge \implies couplage au Z^0 est purement LH:

$$(J_\mu^{NC})_\nu = \frac{1}{4} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu .$$

Mais le couplage du Z^0 aux quarks u et d a des parties LH et RH:

$$(J_\mu^{NC})_u = \frac{1}{2} \left[\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} x \right) + \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u \left(-\frac{2}{3} x \right) \right] ,$$

$$(J_\mu^{NC})_d = \frac{1}{2} \left[\bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} x \right) + \bar{d} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) d \left(\frac{1}{3} x \right) \right] ,$$

où $x \equiv \sin^2 \theta_W$.

R_ν : le courant chargé est LL \implies

$$\begin{aligned} R_\nu &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - x + \frac{20}{27}x^2 . \end{aligned}$$

$R_{\bar{\nu}}$: les couplages LL des courants chargés et neutres agissent comme des couplages LR (et vice-versa) \implies

$$\begin{aligned} R_{\bar{\nu}} &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 \right] / \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} - x + \frac{20}{9}x^2 . \end{aligned}$$

Dernières données:

$$R_\nu = 0.3113 \pm 0.0023 , \quad R_{\bar{\nu}} = 0.384 \pm 0.011 ,$$

$\implies x \simeq 0.22$. Des dernières mesures au pôle du Z^0 nous donnent une valeur de x encore plus précise. Mais le point est qu'avant la découverte du Z^0 , il y avait des indices de son existence et on pouvait même mesurer ces couplages aux fermions.

Courants Neutres: Pôle du Z^0

Des expériences au CERN et à SLAC ont mesuré le processus $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow f\bar{f}$ à $\sqrt{s} = M_Z$ et ont étudié des propriétés du Z^0 .

Question: étant donné que le propagateur du Z^0 est

$$iD_F^{\mu\nu}(q) = \frac{-i(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2)}{q^2 - M_Z^2 + i\epsilon},$$

qu'est-ce qui se passe quand $q^2 = M_Z^2$? Le propagateur semble diverger.

En fait, comme le Z^0 est massif et peut se désintégrer, il faut inclure sa largeur dans le propagateur. Ce dernier est maintenant donné par

$$iD_F^{\mu\nu}(q) = \frac{-i(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2)}{q^2 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z + i\epsilon},$$

où Γ_Z est la largeur du Z^0 . Donc, quand $q^2 = M_Z^2$, le "vrai" propagateur ne diverge pas. Par contre, comme $M_Z \sim 91$ GeV, tandis que $\Gamma_Z \sim 2.5$ GeV, la section efficace pour $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow f\bar{f}$ au pôle du Z^0 est beaucoup plus grande qu'à d'autres énergies.

Remarque: l'échange d'un photon contribue aussi à $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$. Cependant, $\sigma_{\gamma\gamma}/\sigma_{ZZ} \sim (\Gamma_Z/M_Z)^2$ et $\sigma_{\gamma Z}/\sigma_{ZZ} \sim (\Gamma_Z/M_Z)$. Ces rapports sont très petits. Donc, au pôle du Z^0 , $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ est dominé par l'échange d'un Z^0 .

Les dernières mesures de la masse et largeur du Z^0 donnent

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV} \quad , \quad \Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV} \text{ .}$$

Les largeurs partielles de $Z^0 \rightarrow f\bar{f}$ ont été mesurées et donnent une valeur précise de $\sin^2 \theta_w$. Si on additionne les largeurs partielles théoriques, on trouve que le taux total est légèrement plus petit que la valeur expérimentale. Ceci est dû aux effets supplémentaires: la masse du b , les corrections fortes pour les états finaux hadroniques et les corrections radiatives électrofaibles.

La désintégration du Z^0 est sensible aux nouveaux fermions. Le résultat expérimental s'accorde avec le calcul théorique \implies on peut contraindre l'existence de nouveaux fermions légers. En particulier, la mesure de la largeur du Z^0 établit le nombre de neutrinos légers à $N_\nu = 2.983 \pm 0.009$.

Courants Chargés: Kaons et le Quark c

Il y a 60 ans, on ne connaissait que les quarks u , d et s . On observait les désintégrations $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ et $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^+ e^- \bar{\nu}_e$, ce qui impliquaient des transitions faibles $u \leftrightarrow d$. Mais les désintégrations $\Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$, $\Sigma^- \rightarrow ne^- \bar{\nu}_e$ et $\Xi \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu}_e$ indiquaient qu'il y avait aussi des transitions faibles $u \leftrightarrow s$. On peut donc écrire le courant hadronique comme suit:

$$J_h^{\mu(+)} = a [\bar{u}_L \gamma^\mu d_L] + b [\bar{u}_L \gamma^\mu s_L] .$$

On peut comprendre a et b à l'aide de la théorie des groupes. Dans l'espace $(u, d, s)^T$, nous avons

$$Q_h^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad Q_h^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De plus,

$$[Q_h^{(+)}, Q_h^{(-)}] = 2Q_h^{(3)} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & -ab \\ 0 & -ab & -b^2 \end{pmatrix} .$$

Interprétation: $Q^{(\pm)} \leftrightarrow W^\pm$, $Q_h^{(3)} \leftrightarrow W^3$.

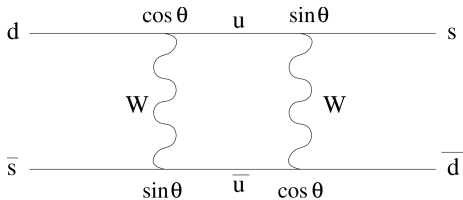
Point: $a^2 + b^2 = 1$ (unitarité). Donc: $a = \cos \theta_C$, $b = \sin \theta_C$, où θ_C est l'angle de Cabibbo. Données expérimentales: $\cos \theta_C = 0.9738 \pm 0.0005$ et $\sin \theta_C = 0.2196 \pm 0.0023$.

Mais: on observait le mélange $K^0 - \bar{K}^0$. Ceci se comprend par des désintégrations communes:

$$K_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [K^0 + \bar{K}^0] \quad , \quad K_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [K^0 - \bar{K}^0] \quad ,$$

avec $K_1 \rightarrow 2\pi$, mais $K_2 \not\rightarrow 2\pi$. Donc, le mélange $K^0 - \bar{K}^0$ est dû à $K^0 \rightarrow 2\pi \leftarrow \bar{K}^0$. Expérimentalement: $(\Delta m)_{K_1 - K_2} = O(G_F M_K^2)^2 M_K$.

Problème: le W contribue au mélange $K^0 - \bar{K}^0$ via le diagramme "en boîte":



Pour évaluer cette contribution, il faut faire une intégrale de boucle. Mais sans calcul, on peut l'estimer. Dans la boucle, on intègre sur les impulsions intermédiaires $\implies \exists$ un facteur

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot$$

Les propagateurs des particules internes sont

$$\text{fermions} : \left(\frac{1}{\not{k}}\right)^2, \quad W_S : \left(\frac{1}{k^2 - M_W^2}\right)^2.$$

L'intégrale de boucle a donc deux puissances de k dans le dénominateur (c'est fini). On a

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{\not{k}}\right)^2 \left(\frac{1}{k^2 - M_W^2}\right)^2 \sim \frac{1}{M_W^2}.$$

Dans le diagramme en boîte il y a 4 facteurs de g . Mais

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}.$$

$$\implies g^4 \sim G_F^2 M_W^4.$$

Donc, on trouve que

$$(\Delta m)_{K_1-K_2} \sim O(G_F^2 M_W^2) M_K^3 \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C .$$

Il faut comparer ceci avec le résultat expérimental, $(\Delta m)_{K_1-K_2} = O(G_F M_K^2)^2 M_K$.
Problème:

$$\left(\frac{M_W}{M_K} \right)^2 \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \gg 1 .$$

Alors, la contribution du diagramme en boîte est beaucoup trop grande.

Solution: on introduit un 4^{me} quark ($Q_{em} = 2/3$), nommé c (charm). Avec ce quark, on a un espace de dimension 2 pour les quarks de type u et d :

$U \equiv (u, c)^T$, $D \equiv (d, s)^T$. Alors

$$Q_h^{(+)} = \int d^3x U^\dagger(x) V D(x) , \quad Q_h^{(-)} = \int d^3x D^\dagger(x) V^\dagger U(x) .$$

De plus $[Q_h^{(+)}, Q_h^{(-)}] = 2Q_h^{(3)}$. Le fait que $Q_h^{(3)}$ doit être diagonal dans les saveurs de quark implique que V est unitaire (pas de preuve ici, elle sera donnée plus tard dans un langage plus moderne).

V est une matrice complexe $2 \times 2 \implies \exists$ 8 paramètres. On enlève 4 avec l'unitarité ($V^\dagger V = 1$). De plus, on peut redéfinir les phases des 4 quarks. Une de ces phases est globale \implies il y a un paramètre indépendant ($4 - 3 = 1$). On écrit

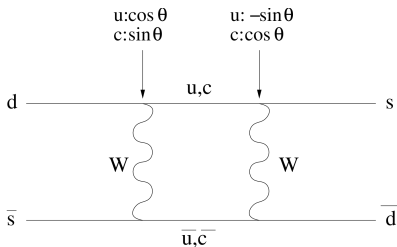
$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} .$$

Le courant hadronique est

$$J_h^{\mu(+)} = \bar{u}_L \gamma^\mu [d \cos \theta_C + s \sin \theta_C]_L + \bar{c}_L \gamma^\mu [-d \sin \theta_C + s \cos \theta_C]_L .$$

Donc, le quark c couple principalement au quark s .

Il y a maintenant plusieurs diagrammes en boîte qui contribuent au mélange $K^0 - \bar{K}^0$:



Si on néglige la différence de masse entre les quarks u et c , les diagrammes s'annulent. La contribution des diagrammes en boîte est

$$(\Delta m)_{K_1-K_2} \sim (G_F M_K^2) \left(G_F (m_c^2 - m_u^2) \ln \frac{M_W^2}{m_c^2} \right) M_K \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C .$$

On demande que

$$(m_c^2 - m_u^2) \ln \frac{M_W^2}{m_c^2} \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \leq M_K^2 ,$$

ce qui implique que

$$m_c^2 - m_u^2 \simeq (1.5 \text{ GeV})^2 .$$

En fait, le quark c a été découvert avec $m_c \simeq 1.5 \text{ GeV}$!

Donc, la considération des courants chargés et le mélange $K^0-\bar{K}^0$ a mené à la prédiction du quark c , ce qui a été confirmé plus tard.

Boson de Higgs

Jusqu'à il y a quelques années, il y avait un morceau du MS qui manquait: le boson de Higgs, H . Comment le détecter?

Rappel: couplage du Higgs aux bosons de jauge:

$$\frac{[v + H]^2}{2} \frac{g^2}{4} [W_\mu^{+2} + W_\mu^{-2}] + \frac{[v + H]^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu .$$

Nous avons

$$M_W = \frac{1}{2} g v \quad , \quad M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v .$$

$\implies g \sim M_W$ et $\sqrt{g^2 + g'^2} \sim M_Z$. Donc, le couplage du Higgs au boson W est proportionnel à M_W . C'est similaire pour le Z^0 .

De façon analogue, le couplage du H aux fermions vient de

$$\mathcal{L}_Y(\psi, \phi) = -\frac{g_Y}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_L (v + H) \psi_R + h.c.] .$$

Masse du fermion: $m_f = g_Y v / \sqrt{2} \implies g_Y \sim m_f$. Donc, le couplage du Higgs aux fermions est proportionnel à m_f .

Point: le boson de Higgs couple à la masse d'une particule \implies afin de le détecter, il faut considérer des processus impliquant des particules lourdes.

Pôle du Z^0 : on pourrait produire le Higgs dans $Z^0 \rightarrow b\bar{b}H$. Cependant, le Higgs n'a pas été détecté $\implies \exists$ une limite $m_H \gtrsim 65$ GeV.

Prochaine expérience (LEP II): $e^+e^- \rightarrow \gamma, Z^0 \rightarrow W^+W^-$ à $\sqrt{s} > 2M_W$. But: mesurer, avec grande précision, M_W et les couplages trilineaires γW^+W^- et $Z^0 W^+W^-$. Ces expériences ont cherché le Higgs dans $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow Z^0 H$. À l'énergie la plus haute, $\sqrt{s} \leq 209$ GeV, les 4 expériences du LEP II trouvent: soit une limite $m_H > 114.1$ GeV, soit un signal faible du Higgs avec $m_H = 115.6$ GeV. (La désintégration principale du Higgs est dans $b\bar{b}$, avec $\tau^+\tau^-$ en 2^{me} place.)

LEP II: arrêté \implies LHC (Large Hadron Collider). LHC: collisions pp (7 TeV sur 7 TeV).

2012: découvert!

ATLAS et CMS ont tous les deux observé un excès d'événements dans les canaux $pp \rightarrow l^+l^-l^+l^-, l^+\nu l^-\bar{\nu}, \gamma\gamma \implies$ un Higgs de masse 125 GeV est présent et se désintègre en ZZ^*, WW^* ou $\gamma\gamma$.

Remarque: au début, le taux de production de $\gamma\gamma$ était 2 fois plus grand que dans le MS. Ce fait soulevait des questions. Est-ce vraiment le Higgs du MS? Ou est-ce qu'on a des signes de la nouvelle physique? Cependant, maintenant le taux de $H \rightarrow \gamma\gamma$ est en raisonnable accord avec le MS.

Masses des Fermions

Pour les masses des fermions, à cause de la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$, il faut écrire un terme de Yukawa:

$$\mathcal{L}_Y(\psi, \phi) = -g_Y \phi \bar{\psi}_L \psi_R + h.c.$$

(Invariant sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$.) Lorsque ϕ acquiert un vev, la symétrie est brisée et les fermions acquièrent une masse $m_f = g_Y v / \sqrt{2}$.

Quarks: il n'y a pas de symétrie qui interdit un terme de la forme $\phi \bar{u}_L c_R$ (par exemple). Donc, si on écrit $U \equiv (u, c, t)^T$ et $D \equiv (d, s, b)^T$, les termes de masses prennent la forme

$$\lambda_U^{ij} v \bar{U}_L^i U_R^j + h.c. \quad , \quad \lambda_D^{ij} v \bar{D}_L^i D_R^j + h.c. \quad .$$

⇒ pour les quarks on obtient des *matrices* de masse:

$$M_U = \lambda_U v \quad , \quad M_D = \lambda_D v \quad .$$

Mes les quarks physiques ont des masses bien définies ⇒ il faut diagonaliser ces matrices de masse.

Matrice générale diagonalisée par une transformation *bi-unitaire*:

$$M_U^{\text{diag}} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} = \mathcal{U}_L^{U\dagger} M_U \mathcal{U}_R^U$$
$$M_D^{\text{diag}} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} = \mathcal{U}_L^{D\dagger} M_D \mathcal{U}_R^D ,$$

dans lequel toutes les matrices unitaires $\mathcal{U}_{L,R}^{U,D}$ sont différentes.

Avec ces relations, les termes de masse pour les quarks sont diagonalisés par les transformations

$$U_{L,R}^0 = \mathcal{U}_{L,R}^U U_{L,R}^U , \quad D_{L,R}^0 = \mathcal{U}_{L,R}^D D_{L,R}^D .$$

Ici, l'indice '0' indique les états propres de jauge; aucun indice \implies les états propres de masse.

Courant Chargé – Matrice CKM

Qu'est-ce qui se passe au courant chargé sous une telle transformation? Dans la base de jauge, le courant chargé est diagonal:

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{U}_L^0 \gamma^\mu D_L^0 W_\mu^+ + h.c.$$

Dans la base de masse, ceci devient

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{U}_L \mathcal{U}_L^{U\dagger} \mathcal{U}_L^D \gamma^\mu D_L W_\mu^+ + h.c. \equiv -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{U}_L V_{CKM} \gamma^\mu D_L W_\mu^+ + h.c.,$$

où CKM = Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

Comme \mathcal{U}_L^U et \mathcal{U}_L^D sont différents, V_{CKM} n'est plus diagonal \implies toutes les transitions de courant chargé sont permises:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} .$$

Nombre de paramètres indépendants dans V_{CKM} : matrice $3 \times 3 \implies$ a priori 18 paramètres réels. L'unitarité de V_{CKM} enlève 9; on peut enlever 5 autres en changeant la phase de quarks $\implies \exists 9 - 5 = 4$ paramètres indépendants. 3 sont des angles (comme les angles d'Euler); 1 est une phase.

Paramétrisation standard:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix},$$

où $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$.

Tous les éléments dans les premières deux rangées de la matrice CKM ont été mesurés. Derniers résultats: $s_{12} = 0.2243 \pm 0.0016$ (l'angle de Cabibbo), $s_{23} = 0.0413 \pm 0.0015$ et $s_{13} = 0.0037 \pm 0.0005$. La phase δ_{13} est responsable de la violation CP (à discuter en détail). Jusqu'à présent, on ne connaît pas sa valeur avec précision. On la mesure actuellement dans des désintégrations des B .

Courant Neutre

Comme le courant chargé, le courant neutre est diagonal dans la base de jauge:

$$-\sqrt{g^2 + g'^2} \left[\bar{U}_L^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu U_L^0 + \bar{U}_R^0 \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu U_R^0 \right. \\ \left. + \bar{D}_L^0 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu D_L^0 + \bar{D}_R^0 \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu D_R^0 \right] Z_\mu .$$

Transformation à la base de masse:

$$-\sqrt{g^2 + g'^2} \left[\bar{U}_L^U U_L^{U\dagger} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu U_L^U U_L + \bar{U}_R^U U_R^{U\dagger} \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu U_R^U U_R \right. \\ \left. + \bar{D}_L^D U_L^{D\dagger} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu U_L^D D_L + \bar{D}_R^D U_R^{D\dagger} \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu U_R^D D_R \right] Z_\mu .$$

Tous les cas: $U^\dagger U = 1 \implies$ le courant neutre reste diagonal. Il n'y a pas de courants neutres changeant de saveur (FCNCs) au niveau des arbres. C'est le mécanisme de Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM). Accord avec l'expérience: e.g., $BR(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e) \simeq 5\%$ (courant chargé), mais $BR(K^+ \rightarrow \pi^+ \bar{\nu}_e \nu_e) \simeq 10^{-10}$ (courant neutre).

Violation CP: Système des Kaons

Les interactions faibles violent P (parité) et C (conjugaison de charge) parce qu'elles n'impliquent que la composante L d'un fermion. Par exemple, le couplage au $e_L^- \neq$ couplage au e_R^- (violation de P). De plus, le couplage au $e_L^- \neq$ couplage au e_L^+ (violation de C). Mais la combinaison CP est conservée: le couplage au $e_L^- =$ le couplage au e_R^+ . Donc, on pensait que les interactions faibles conservent CP

Cette idée était soutenue par des observations dans le système de kaons. 2 états étaient observés avec des temps de vie différents:

$$K_S : \quad \tau_S \sim 10^{-10} \text{ sec ,}$$

$$K_L : \quad \tau_L \sim 10^{-7} \text{ sec .}$$

Désintégrations:

$$K_S \rightarrow \pi\pi \quad CP = + ,$$

$$K_L \rightarrow \pi\pi\pi \quad \pi^0\pi^0\pi^0 : CP = - .$$

$\Rightarrow K_S$ est CP +, K_L est CP -, et CP est conservée.

Cependant: 1964: la désintégration $K_L \rightarrow 2\pi$ observée. Petit rapport d'embranchement ($\simeq 10^{-3}$), mais violation de CP.

\Rightarrow On définit

$$K_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [K^0 + \bar{K}^0] \quad (CP = +),$$

$$K_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [K^0 - \bar{K}^0] \quad (CP = -).$$

États physiques sont des combinaisons linéaires de CP + et CP -:

$$K_S \equiv \frac{1}{1 + |\epsilon|^2} [K_1 - \epsilon K_2],$$

$$K_L \equiv \frac{1}{1 + |\epsilon|^2} [K_2 + \epsilon K_1],$$

avec $|\epsilon| = 2.26 \times 10^{-3}$.

Théorie: (1) pas d'interactions faibles: K^0 et \bar{K}^0 sont des états propres de H :

$$\begin{pmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{pmatrix} .$$

K^0 et \bar{K}^0 ont la même masse.

(2) On rajoute les interactions faibles. K^0 et \bar{K}^0 ne sont pas des états propres \implies
 \exists un mélange K^0 - \bar{K}^0 . Si CP conservé:

$$\begin{pmatrix} m_0 & \Delta \\ \Delta & m_0 \end{pmatrix} .$$

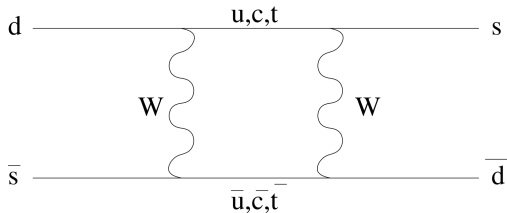
États propres: K_1 et K_2 (états propres de CP).

(3) On rajoute la violation CP:

$$\begin{pmatrix} m_0 & \Delta \\ \Delta^* & m_0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta^*}} .$$

Remarque: si Δ est réel, $\epsilon = 0$ (conservation de CP). Donc: la violation CP est due aux *phases* dans les interactions faibles.

Mais: la matrice CKM comprend une phase complexe \implies on trouve des phases faibles dans le MS avec 3 générations. Cette phase peut expliquer la violation CP observée dans le système des kaons parce que le diagramme en boîte comprend des quarks internes u , c et t :



La mesure de $|\epsilon|$ est très précise. Malheureusement, ceci n'équivaut pas une mesure précise de δ_{13} . La raison: une incertitude hadronique importante entre un résultat au niveau des quarks (δ_{13}) et le même résultat au niveau mésonique ($|\epsilon|$).

\exists une seule mesure de violation CP, un seul paramètre théorique (δ_{13}). Donc, le système des kaons ne peut pas *tester* l'explication du MS de la violation CP. Pour ceci, il faut considérer d'autres signaux de la violation CP \implies le système des mésons B .

Violation CP: Système des Mésons B

Selon le MS, la violation CP dans le secteur des kaons est due à une phase dans la matrice CKM. Comme $K^0 = \bar{s}d$, on peut imaginer que le MS prédit des effets de violation CP dans des mésons impliquant d'autres quarks avec $Q_{em} = -1/3$. En effet, le MS prédit la violation CP dans des désintégrations des mésons $B_d^0 = \bar{b}d$ et $B_s^0 = \bar{b}s$.

On observe expérimentalement que les éléments de la matrice CKM suivent une hiérarchie en fonction de l'angle de Cabibbo:

$$V_{CKM} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\lambda = \sin \theta_C$.

On peut utiliser ce fait afin d'obtenir une autre paramétrisation de la matrice CKM. Prenons la paramétrisation standard. On écrit $s_{12} \equiv \lambda$, $s_{23} \equiv A\lambda^2$, $s_{13}e^{-i\delta_{13}} \equiv A\lambda^3(\rho - i\eta)$. On peut maintenant paramétriser la matrice CKM de façon approximative:

$$V_{CKM} \simeq \begin{matrix} u \\ c \\ t \end{matrix} \begin{pmatrix} & d & s & b \\ & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ & -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} .$$

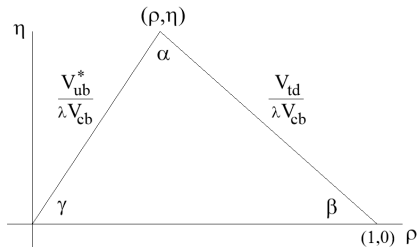
On remarque qu'il y a encore 4 paramètres: λ , A et ρ agissent comme des angles, tandis qu'on représente la phase complexe par η . Avec cette paramétrisation, V_{CKM} est unitaire jusqu'à $O(\lambda^3)$.

Avec cette paramétrisation, les phases les plus importantes se trouvent seulement dans les éléments du coin, V_{ub} et V_{td} . Paramétrisation: $V_{ub} = |V_{ub}| \exp(-i\gamma)$, $V_{td} = |V_{td}| \exp(-i\beta)$.

Mais les 1^{ère} et 3^{ième} colonnes sont orthogonales:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 = |V_{ud}||V_{ub}|e^{i\gamma} + |V_{cd}||V_{cb}^*| + |V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta}.$$

Ceci est une relation triangulaire dans le plan complexe. On peut représenter cette relation par le triangle unitaire:

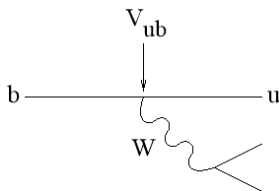
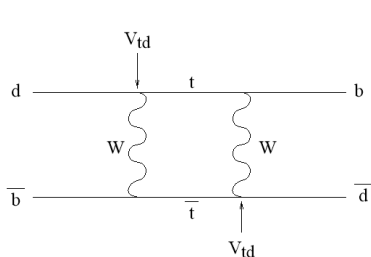


Les angles intérieurs, α , β et γ , sont tous proportionnels à $\eta \implies$ une valeur non-nulle d'un de ces angles implique la violation CP. Ces angles ne sont pas indépendants: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Point clé: on peut mesurer tous ces angles, *sans incertitude hadronique*, dans des désintégrations des mésons B .

Voici un bref aperçu de ce phénomène:

- La symétrie CP relie les processus $B \rightarrow f$ et $\bar{B} \rightarrow \bar{f} \implies$ une différence entre ces deux implique la violation CP.
- Comme pour les kaons, \exists le mélange $B^0-\bar{B}^0 \implies$ une particule “née” comme B^0 deviendra dans le temps une combinaison de B^0 et \bar{B}^0 : $B^0(t)$. Le $B^0(t)$ peut se désintégrer comme B^0 ou \bar{B}^0 . Si on considère un état final f auquel B^0 et \bar{B}^0 peuvent se désintégrer, le processus $B^0(t) \rightarrow f$ a deux voies: $B^0 \rightarrow f$ ou $\bar{B} \rightarrow f$. On peut avoir interférence entre ces deux amplitudes.
- Les phases dans les éléments du coin ($V_{ub} = |V_{ub}| \exp(-i\gamma)$, $V_{td} = |V_{td}| \exp(-i\beta)$) se trouvent dans des processus des Bs:



∃ 4 possibilités:

- 1 B_d^0 avec $b \rightarrow u$: phase = β (mélange) + γ (désintégration).
- 2 B_d^0 avec $b \rightarrow c$: phase = β (mélange) + 0 (désintégration).
- 3 B_s^0 avec $b \rightarrow u$: phase = 0 (mélange) + γ (désintégration).
- 4 B_s^0 avec $b \rightarrow c$: phase = 0 (mélange) + 0 (désintégration).

Si on considère différents états finaux f , on peut extraire les 3 angles de la violation CP dans $B^0(t) \rightarrow f$:

- α : $B_d^0(t) \rightarrow \pi\pi, \rho\pi, \rho\rho$, etc.
- β : $B_d^0(t) \rightarrow J/\psi K_S, \phi K_S$, etc.
- γ : $B \rightarrow DK, B_s^0(t) \rightarrow D_s^\pm K^\mp$, etc.

Si on mesure les côtés et les angles du triangle unitaire de plusieurs façons différentes, on peut tester le MS. Espoir: on trouve un désaccord, qui pointe vers la physique au-delà du MS.

Dernières données:

$$B_d^0(t) \rightarrow \pi\pi, \rho\pi, \rho\rho : \alpha = (87.6_{-3.3}^{+3.5})^\circ .$$

$$\text{charmonium} : \beta = (21.85_{-0.67}^{+0.65})^\circ .$$

$$B \rightarrow D^{(*)}K^{(*)} : \gamma = (73.2_{-7.0}^{+6.3})^\circ .$$

Presque toutes les données sont cohérentes l'une avec l'autre et avec le MS.

Mais (2010):

- $B \rightarrow \pi K$. Il y a 4 processus: $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$, $B^+ \rightarrow \pi^+ K^0$, $B_d^0 \rightarrow \pi^- K^+$, $B_d^0 \rightarrow \pi^0 K^0$. Il y a 9 mesures: 4 rapports d'embranchement, 4 asymétries directes violant CP, 1 asymétrie indirecte violant CP (dans $B_d^0 \rightarrow \pi^0 K_S$). Quand on fait un fit, il y a un écart de $\sim 2\sigma$ entre les prédictions du MS et les mesures expérimentales.
- MS: $A_{CP}^{indir}(\text{charmonium}) = A_{CP}^{indir}(B_d^0(t) \rightarrow \phi K_S)$. Données:

$$A_{CP}^{indir}(\text{charmonium}) : \sin 2\beta = 0.670 \pm 0.023 ,$$

$$A_{CP}^{indir}(B_d^0(t) \rightarrow \phi K_S) : \sin 2\beta = 0.56_{-0.18}^{+0.16} .$$

- $B \rightarrow \phi K^*$. Les particules finales sont des mésons vectoriels. Alors cette désintégration est en fait 3 désintégrations, une pour chaque polarisation (1 longitudinale, 2 transversales). On s'attend à ce que la fraction de désintégrations transversales, f_T , soit beaucoup plus petite que la fraction de désintégrations longitudinales, f_L . Mais on observe que $f_T \simeq f_L$.
- MS: la phase violant CP dans le mélange $B_s^0-\overline{B}_s^0$: $\beta_s \simeq 0$. Données:

$$\beta_s = 0.38_{-0.18}^{+0.17} .$$

- MS: violation CP dans $B_s^0(t) \rightarrow J/\psi\phi$: $\phi_s \simeq 0$. Données:

$$A_{CP}^{indir}(B_s^0(t) \rightarrow J/\psi\phi) : \phi_s = -0.57_{-0.30-0.02}^{+0.24+0.07} .$$

Indices de la nouvelle physique? Signaux presque tous à $\sim 2\sigma$ – pas significatif statistiquement. Mais...

2011:

- $B \rightarrow \pi K$. Désaccord toujours là. Mais l'écart est seulement $\sim 1.5\sigma$.
- LHCb a mesuré la violation CP dans $B_s^0(t) \rightarrow J/\psi\phi$, trouvant

$$\beta_s^{J/\psi\phi} = (0.070 \pm 0.068 \text{ (stat)} \pm 0.008 \text{ (syst)})^\circ .$$

C'est à dire: la phase violant CP dans le mélange $B_s^0-\bar{B}_s^0$ est $\beta_s \simeq 0$, comme prédit le MS.

- MS: $A_{CP}^{indir}(\text{charmonium}) = A_{CP}^{indir}(B_d^0(t) \rightarrow f)$ avec $\bar{b} \rightarrow \bar{s}q\bar{q}$ (pingouin) (ceci comprend $f = \phi K_s$). Données:

$$\begin{aligned} A_{CP}^{indir}(\text{charmonium}) & : \sin 2\beta = 0.679 \pm 0.020 , \\ A_{CP}^{indir}(B_d^0(t) \rightarrow f) (\bar{b} \rightarrow \bar{s}q\bar{q} \text{ pingouin}) & : \sin 2\beta = 0.64 \pm 0.04 . \end{aligned}$$

Cohérent avec le MS.

- Tôt en 2011, CDF a mesuré

$$B(\bar{B}_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (1.8_{-0.9}^{+1.1}) \times 10^{-8} ,$$

en désaccord avec le MS, qui prédit $B(\bar{B}_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (3.35 \pm 0.32) \times 10^{-9}$.
Cependant, plus tard en 2011, LHCb a trouvé une limite supérieure:

$$B(\bar{B}_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) \leq 1.3 \times 10^{-8} \quad (90\% \text{ C.L.}) ,$$

en accord avec le MS. Et en 2013, il a observé cette désintégration:

$$B(\bar{B}_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 3.2 \pm 1.0 \times 10^{-9} .$$

Donc, la plupart des résultats suggérant la nouvelle physique ont disparu.

Mais: en 2010, l'expérience DØ a observé une asymétrie impliquant les deux muons dans $b\bar{b} \rightarrow \mu^\pm \mu^\pm X$. La mise à jour de 2011 donne

$$A_{sl}^b = -(7.87 \pm 1.72 \pm 0.93) \times 10^{-3} ,$$

une déviation de 3.9σ de la prédiction du MS, $A_{sl}^{b,MS} = (-2.3_{-0.6}^{+0.5}) \times 10^{-4}$.
Peut-être ...

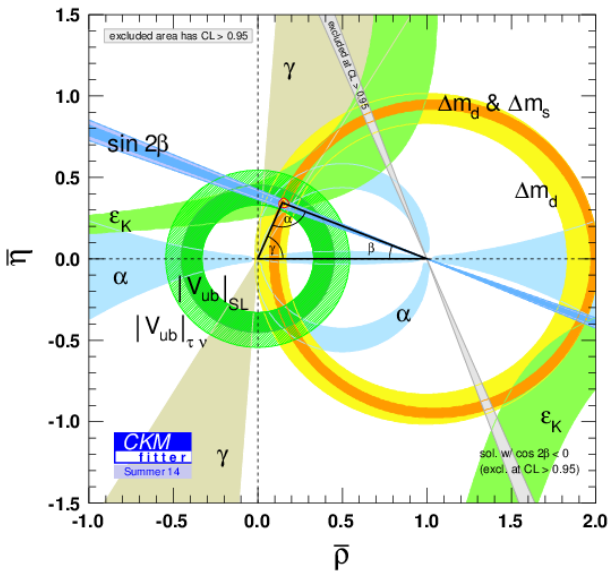
De plus (2015):

Mélange $B_s^0 - \bar{B}_s^0$:

$$\begin{aligned} (\Delta M_s)_{\text{exp.}} &= (11.69 \pm 0.02) \times 10^{-9} \text{ MeV} , \\ (\Delta M_s)_{\text{MS}} &= (11.4 \pm 1.7) \times 10^{-9} \text{ MeV} . \end{aligned}$$

La mesure expérimentale est cohérente avec la prédiction du MS, Mais: l'erreur théorique associée avec cette prédiction est grande \implies il y a de la place pour la nouvelle physique.

2018:



2016:

P'_5 : LHCb et Belle ont fait une analyse angulaire de $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$, ils trouvent un désaccord avec le MS dans l'observable P'_5 . Tenant compte des incertitudes théoriques, les derniers fits trouvent que le désaccord est au niveau de $\sim 4\sigma$.

LHCb a mesuré le rapport d'embranchement et fait une analyse angulaire de $B_s^0 \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$ et trouve un désaccord de 3.5σ avec les prédictions du MS.

R_K (LHCb):

$$R_K \equiv \frac{\mathcal{B}(B^+ \rightarrow K^+ \mu^+ \mu^-)}{\mathcal{B}(B^+ \rightarrow K^+ e^+ e^-)} = 0.745_{-0.074}^{+0.090} \text{ (stat)} \pm 0.036 \text{ (syst)} .$$

La prédiction du MS est $R_K = 1 \pm O(10^{-2}) \implies$ il y a une différence de 2.6σ .

2017: R_{K^*} (LHCb):

$$\begin{aligned} R_{K^*} &\equiv \frac{\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^{0*} \mu^+ \mu^-)}{\mathcal{B}(B^0 \rightarrow K^{0+} e^+ e^-)} \\ &= 0.660_{-0.070}^{+0.110} \text{ (stat)} \pm 0.024 \text{ (syst)} , \quad 0.045 \leq q^2 \leq 1.1 \text{ GeV}^2 , \\ &= 0.685_{-0.069}^{+0.113} \text{ (stat)} \pm 0.047 \text{ (syst)} , \quad 1.1 \leq q^2 \leq 6.0 \text{ GeV}^2 . \end{aligned}$$

Prédictions: $R_{K^*}^{low,SM} \simeq 0.93$, $R_{K^*}^{cen,SM} \simeq 1$. Désaccord avec le MS: $\sim 2.4\sigma$ ($R_{K^*}^{low}$)
et $\sim 2.5\sigma$ ($R_{K^*}^{cen}$).

Ensemble: analyses globales trouvent un écart avec le MS: 4 à 6 σ
 \Rightarrow nouvelle physique dans $b \rightarrow s \mu^+ \mu^-$?

$R_{D^{(*)}}$ (BaBar, Belle, LHCb): on définit

$$R_D \equiv \frac{\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow D^+ \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow D^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell)} , \quad R_{D^*} \equiv \frac{\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow D^{*+} \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow D^{*+} \ell^- \bar{\nu}_\ell)} .$$

LHCb a mesuré ces rapports et trouve un désaccord avec les prédictions du MS:

$$R_D^{\text{ratio}} \equiv \frac{R_D^{\text{exp}}}{R_D^{\text{MS}}} = 1.29 \pm 0.17 , \quad R_{D^*}^{\text{ratio}} \equiv \frac{R_{D^*}^{\text{exp}}}{R_{D^*}^{\text{MS}}} = 1.28 \pm 0.09 .$$

Les valeurs mesurées de R_D^{ratio} et $R_{D^*}^{\text{ratio}}$ représentent des désaccords de 1.7σ and 3.1σ , respectivement. Ensemble, écart avec le MS: $\sim 4\sigma$.

2018: LHCb mesure

$$R_{J/\psi} \equiv \frac{\mathcal{B}(B_c \rightarrow J/\psi \tau \nu_\tau)}{\mathcal{B}(B_c \rightarrow J/\psi \mu \nu_\mu)} ,$$

la mesure diffère de la prédiction du MS par 1.7σ .

\Rightarrow nouvelle physique dans $b \rightarrow c \tau^+ \nu_\tau^-$? À suivre...

Masses des Neutrinos

Masses des quarks:

$$m\bar{\Psi}\Psi = m [\bar{\psi}_L\psi_R + h.c.] .$$

Ceci est un terme de *masse de Dirac*. Il relie des états LH et RH, i.e., des états de chiralité *opposée*.

MS: on ne peut pas écrire un tel terme. Au lieu: terme de Yukawa:

$$-g_Y [\bar{\psi}_L\phi\psi_R + h.c.] .$$

ϕ : le champ de Higgs; g_Y le couplage de Yukawa. Lorsque ϕ acquiert un vev, la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est brisée et on génère une masse de Dirac pour les fermions: $m\bar{\Psi}\Psi$, avec $m = g_Y v$.

Quarks: une matrice de masse qu'il faut diagonaliser. On passe des états propres de jauge aux états propres de masse (états physiques):

$$U_{L,R} = \mathcal{U}_{L,R}^U U_{L,R}^0 , \quad D_{L,R} = \mathcal{U}_{L,R}^D D_{L,R}^0 ,$$

où $U \equiv (u, c, t)^T$ et $D \equiv (d, s, b)^T$.

Leptons chargés, $L \equiv (e, \mu, \tau)^T$: tout comme les quarks. On relie les états propres de jauge et de masse:

$$L_{L,R} = \mathcal{U}_{L,R}^\ell L_{L,R}^0 .$$

Neutrinos: plus compliqués. Nous avons: Ψ , qui annihile des fermions et crée des antifermions; $\bar{\psi}$, qui crée des fermions et annihile des antifermions. Mais: on peut définir Ψ^c :

$$\Psi^c \equiv C \bar{\Psi}^T,$$

où $C = i\gamma^2\gamma^0$. Ceci est un champ conjugué de charge. L'opérateur de conjugaison de charge C transforme un fermion dans un état donné de spin à un antifermion dans le même état de spin. Le champ Ψ^c agit comme $\bar{\Psi}$: il crée des fermions et annihile des antifermions.

On peut écrire un terme de masse impliquant Ψ^c :

$$m_R \bar{\Psi}^c \Psi.$$

Ceci est un terme de *masse de Majorana*.

Remarque: avec $\bar{\psi}_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$, on a

$$\begin{aligned} (\Psi_L)^c &= C \bar{\psi}_L^T = C \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \bar{\Psi}^T = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \Psi^c \\ \implies \overline{(\Psi_L)^c} &= \Psi^{c\dagger} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \gamma^0 = \bar{\Psi}^c \frac{1}{2}(1 - \gamma_5). \end{aligned}$$

Donc, le terme de masse de Majorana s'écrit

$$m_R \overline{\Psi^c} \Psi = m_R \left[\overline{(\Psi_L)^c} \Psi_L + \overline{(\Psi_R)^c} \Psi_R \right] .$$

⇒ terme de masse de Majorana relie des états de la *même* chiralité.

Remarque: les opérateurs Ψ et $\overline{\Psi^c}$ créent des antifermions ⇒ on ne peut écrire un terme de masse de Majorana que pour des particules neutres. (Sinon on viole la conservation de charge électrique.) De plus, on construit $\overline{(\Psi_L)^c} \Psi_L$ à partir de champs LH seulement. Très intéressant pour neutrinos car le MS ne contient pas de neutrinos RH!

Question: est-ce qu'on peut générer une masse pour les neutrinos à partir d'un terme de masse de Majorana:

$$\overline{(\nu_L)^c} \nu_L?$$

Réponse: non. Dans le MS, ν_L est un membre d'un doublet de $SU(2)_L$: $\nu_L \sim \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$. Donc, le terme de masse de Majorana se transforme comme $|11\rangle$. Comme ce n'est pas un singulet, on ne peut pas l'inclure dans le Lagrangien. De plus, comme il se transforme comme un triplet, on ne peut pas le générer lorsque le doublet de Higgs acquiert un vev.

Donc: afin de générer des masses pour les neutrinos dans le MS, il faut ajouter le neutrino RH ν_R , comme pour les quarks et leptons chargés. On a le terme de masse de Dirac:

$$f_\nu \overline{\nu_L^0} \nu_R^0 \phi + h.c.$$

Lorsque le Higgs acquiert un vev, on génère une masse pour les neutrinos: $m_\nu = f_\nu v$. Mais: $v \simeq 250$ GeV. Comme $m_\nu \sim 0.05$ eV (observé) $\implies f_\nu \sim 10^{-13}$! Ceci est beaucoup trop petit pour être naturel. Est-ce qu'on ne peut pas trouver une meilleure solution?

Oui. Nous avons ajouté le ν_R , un singulet dans le MS. Il n'y a rien qui nous empêche d'ajouter un terme de masse de Majorana pour le ν_R :

$$\overline{(\nu_R)^c} \nu_R .$$

Ce terme ne viole pas de symétrie du MS.

Le terme de masse pour les neutrinos comprend un terme de Dirac et de Majorana:

$$\begin{aligned} L_{m_\nu} &= -m_D \overline{\nu_R^0} \nu_L^0 - \frac{1}{2} m_R \overline{(\nu_R^0)^c} \nu_R^0 + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \left(\overline{(\nu_L^0)^c} \quad \overline{\nu_R^0} \right) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ (\nu_R^0)^c \end{pmatrix} + h.c. \end{aligned}$$

Ceci définit la matrice de masse des neutrinos, \mathcal{M}_ν .

Comme \mathcal{M}_ν est symétrique, on peut la diagonaliser à l'aide d'une seule matrice unitaire, \mathcal{U}_ν :

$$\mathcal{M}_\nu^{diag} = \begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_\nu^T \mathcal{M}_\nu \mathcal{U}_\nu ,$$

Les masses des neutrinos sont

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} , \quad m_2 \simeq m_R .$$

Pour $m_D \sim m_t \sim 175$ GeV (i.e., l'échelle faible) et $m_R \sim 10^{15}$ GeV (une échelle typique de la grande unification), on a $m_1 \sim 3 \times 10^{-2}$ eV, qui est à peu près ce qui est observé.

Ceci est le *mécanisme de balançoire* (“seesaw mechanism”). Remarque: il prédit un neutrino RH avec une masse très élevée.

Lorsque la matrice de masse des neutrinos est diagonalisée,

$$\begin{aligned} & \left(\overline{(\nu_L^0)^c} \quad \overline{\nu_R^0} \right) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ (\nu_R^0)^c \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \left(\overline{(\nu_L^0)^c} \quad \overline{\nu_R^0} \right) \mathcal{U}_\nu^{T-1} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \mathcal{U}_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ (\nu_R^0)^c \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

On définit le champ de chiralité LH:

$$\nu_L \equiv \mathcal{U}_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ (\nu_R^0)^c \end{pmatrix} .$$

On peut obtenir le champ conjugué de charge:

$$(\nu_L)^c = \mathcal{U}_\nu^T \begin{pmatrix} (\nu_L^0)^c \\ \nu_R^0 \end{pmatrix} .$$

On définit

$$\nu \equiv \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \equiv \nu_L + (\nu_L)^c ,$$

Le terme de masse des neutrinos devient

$$(\overline{\nu_1} \ \overline{\nu_2}) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} .$$

Donc: ν_1 et ν_2 sont les états propres de masse des neutrinos. Mais, la définition de ν (ci-haut) implique que ces états sont auto-conjugués. C'est-à-dire: ν_1 et ν_2 sont leurs propres antiparticules. Ils sont des neutrinos *de type Majorana*.

Remarque: comme les neutrinos et antineutrinos sont la même particule lorsque les neutrinos sont de type Majorana, le nombre leptonique n'est pas conservé.

Donc: certains processus qui sont interdits dans le MS, tel que la double désintégration β sans neutrinos, sont maintenant permises. Ce sont d'excellents tests de la nature Majorana du neutrino.

On peut étendre le mécanisme de balançoire à 3 générations. Le terme de masse dans le Lagrangien est

$$L_{m_\nu} = -\frac{1}{2} \left(\overline{(\nu_L^0)^c} \quad \overline{\nu_R^0} \right) \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^0 \\ (\nu_R^0)^c \end{pmatrix} + h.c. , \quad \text{où } \nu_L^0 = \begin{pmatrix} \nu_{eL}^0 \\ \nu_{\mu L}^0 \\ \nu_{\tau L}^0 \end{pmatrix} .$$

Chacun de m_D et m_R est maintenant 3×3 et m_R est symétrique. Donc, la matrice de masse des neutrinos est 6×6 et symétrique:

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$$

Comme auparavant, on diagonalise la matrice à l'aide d'une matrice unitaire \mathcal{U}_ν : $\mathcal{U}_\nu^T \mathcal{M}_\nu \mathcal{U}_\nu = \mathcal{M}_\nu^{diag} = \text{diag}(m_1, \dots, m_6)$. On peut définir les états physiques (Majorana) des neutrinos:

$$\nu \equiv \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_6 \end{pmatrix} .$$

Courant chargé leptonique:

$$(\bar{e} \quad \bar{\mu} \quad \bar{\tau})_L^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L^0 W_\mu.$$

Pour les leptons chargés, la transformation de la base de jauge à la base de masse est $L_{L,R} = \mathcal{U}_{L,R}^\ell L_{L,R}^0$. Pour les neutrinos, on a

$$\nu_L \equiv \mathcal{U}_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \nu_{eL}^0 \\ \nu_{\mu L}^0 \\ \nu_{\tau L}^0 \\ (\nu_{eR}^0)^c \\ (\nu_{\mu R}^0)^c \\ (\nu_{\tau R}^0)^c \end{pmatrix}, \quad \text{où } \mathcal{U}_\nu = \begin{pmatrix} V & Y \\ X & W \end{pmatrix},$$

dans lequel V , Y , X et W sont des matrices 3×3 .

Rappel: il y a 3 neutrinos légers: $\nu_{1,2,3}$, de masses $m_{1,2,3} \sim m_D^2/m_R$, et 3 neutrinos lourds $\nu_{4,5,6}$, de masses $m_{4,5,6} \sim m_R$. Donc, les matrices X et Y sont $O(m_D/m_R) \implies X, Y \ll V, W$. Alors, on peut négliger X et Y . Comme \mathcal{U} est unitaire, V et W l'est aussi (approximativement).

Donc, pour les neutrinos légers,

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL}^0 \\ \nu_{\mu L}^0 \\ \nu_{\tau L}^0 \end{pmatrix} \simeq V \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \equiv V \nu_L^{leger} .$$

Le courant chargé s'écrit

$$\bar{L}_L \gamma^\mu U \nu_L^{leger} W_\mu ,$$

où $U = \mathcal{U}_L^{\ell\dagger} V$ est la matrice de mélange leptonique.

Combien de paramètres dans U ? Comme V_{CKM} , a priori il y a 18 paramètres réels. L'unitarité de U les réduit à 9. On peut enlever 3 paramètres en changeant les phases de e_L^- , μ_L^- et τ_L (on transfère ces phases au secteur RH). Mais: on ne peut pas enlever d'autres paramètres parce que les neutrinos sont Majorana, i.e. ils sont leurs propres antiparticules. (Si on essaie d'enlever des phases de cette façon, elles apparaîtraient ailleurs, par exemple dans les masses.)

Sommaire: le mélange dans le secteur leptonique est décrit par la matrice U . Si on fait la supposition que les neutrinos sont des particules Majorana, U est paramétrisé par 3 angles et 3 phases.

Oscillations des Neutrinos

Sans perdre de généralité, on peut mettre $U_L^{\ell\dagger} = 1$. C'est-à-dire, pour les neutrinos, on peut écrire la transformation de la base de jauge à la base de masse comme étant

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i ,$$

où $\alpha = e, \mu, \tau$ (états propres de jauge) et $i = 1, 2, 3$ (états propres de masse).

On suppose que, au temps $t = 0$, on produit un faisceau purement d'états ν_e . Alors,

$$|\nu_e(0)\rangle = U_{11} |\nu_1\rangle + U_{12} |\nu_2\rangle + U_{13} |\nu_3\rangle .$$

Comment cet état évolue-t-il dans le temps? Cette évolution est contrôlée par l'énergie des neutrinos dans le faisceau. On suppose que tous ces neutrinos ont la même impulsion $p \implies E_i^2 = p^2 + m_i^2$. Donc,

$$|\nu_e(t)\rangle = U_{11} e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + U_{12} e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle + U_{13} e^{-iE_3 t} |\nu_3\rangle .$$

La probabilité de trouver un ν_e dans ce faisceau au temps t est $|\langle \nu_e | \nu_e(t) \rangle|^2$:

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) &= \left| |U_{11}|^2 e^{-iE_1 t} + |U_{12}|^2 e^{-iE_2 t} + |U_{13}|^2 e^{-iE_3 t} \right|^2 \\ &= |U_{11}|^4 + |U_{12}|^4 + |U_{13}|^4 + 2 |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \cos(E_1 - E_2)t \\ &\quad + 2 |U_{11}|^2 |U_{13}|^2 \cos(E_1 - E_3)t + 2 |U_{12}|^2 |U_{13}|^2 \cos(E_2 - E_3)t . \end{aligned}$$

Premiers trois termes:

$$\begin{aligned} |U_{11}|^4 + |U_{12}|^4 + |U_{13}|^4 &= \left(|U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 + |U_{13}|^2 \right)^2 - 2 |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \\ &\quad - 2 |U_{11}|^2 |U_{13}|^2 - 2 |U_{12}|^2 |U_{13}|^2 . \end{aligned}$$

Mais U est unitaire $\implies |U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 + |U_{13}|^2 = 1$.

Donc,

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) &= 1 - 2 |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 (1 - \cos(E_1 - E_2)t) \\ &\quad - 2 |U_{11}|^2 |U_{13}|^2 (1 - \cos(E_1 - E_3)t) \\ &\quad - 2 |U_{12}|^2 |U_{13}|^2 (1 - \cos(E_2 - E_3)t) . \end{aligned}$$

Pour $p \gg m_i$, nous avons

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p},$$

\Rightarrow

$$E_i - E_j = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p}.$$

De plus, comme la vitesse des neutrinos est $\simeq c$, le temps t est équivalent à une distance x .

La probabilité de trouver un ν_e dans ce faisceau à une distance x est

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x) &= 1 - 2 |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \left(1 - \cos \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2p} \right) x \right) \\ &\quad - 2 |U_{11}|^2 |U_{13}|^2 \left(1 - \cos \left(\frac{m_1^2 - m_3^2}{2p} \right) x \right) \\ &\quad - 2 |U_{12}|^2 |U_{13}|^2 \left(1 - \cos \left(\frac{m_2^2 - m_3^2}{2p} \right) x \right). \end{aligned}$$

On peut aussi calculer la probabilité de trouver un ν_μ dans ce faisceau au temps t (ou distance x): $|\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle|^2$.

En fait, étant donné un faisceau de neutrinos ν_α , la probabilité de trouver un ν_β à distance x est

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + 2 \sum_{i \neq j} \text{Re} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{i(E_i - E_j)x} \right) .$$

Point: nous avons la possibilité *d'oscillations des neutrinos*: comme les neutrinos ont des masses, étant donné un faisceau de neutrinos ν_α , la probabilité de trouver une saveur ν_β différente à une certaine distance est non-nulle. La mesure de celle-ci donne de l'information sur les angles de mélange, ainsi que sur la différence de masse², Δm^2 .

Remarque: si la matrice de mélange est complexe, il y a la possibilité d'observer la violation CP.

Valeurs des Masses et du Mélange

Dans le soleil, des processus nucléaires produisent des ν_e seuls \implies nous avons un faisceau de ν_e venant vers la terre. Le modèle standard du soleil (MSS) prédit la valeur du flux de ces neutrinos. Vers la fin des 1960s, l'expérience Homestake de Ray Davis, qui était dans une mine au South Dakota, a mesuré le flux. Ils ont trouvé 1/3 de la valeur prédite par le MSS. C'est le problème des neutrinos solaires.

Explication: il y a oscillations des neutrinos. En venant vers la terre, les ν_e se transforment en d'autres saveurs de neutrinos. (En fait, le taux des oscillations est augmenté dans la matière (l'effet MSW) \implies les oscillations des ν_e se font à l'intérieur du soleil.) L'expérience SNO à Sudbury a mesuré ces oscillations à l'aide d'un détecteur d'eau lourde ($H_2O \rightarrow D_2O$, où D (deutérium) est $p + n$).

Avec l'eau lourde, il y a deux façons de détecter les neutrinos. (1) Courant chargé: $\nu n \rightarrow e^- p$, on détecte l' e^- – sensible seulement à ν_e . (2) Courant neutre: le ν sépare le D en p et n , séparation détectée – sensible à toutes les saveurs, ν_e, ν_μ, ν_τ .

2001: SNO a trouvé de l'évidence pour l'oscillations des neutrinos. Si on compare les flux,

$$\frac{\phi_e}{\phi_e + \phi_{\mu\tau}} \simeq \frac{1}{3}$$

\implies oscillations du type $\nu_e \rightarrow \nu_\mu, \nu_\tau$. Ceci contraint les angles de mélange et Δm_{\odot}^2 . Si on combine ceci avec d'autres observations (ci-dessous), ces mesures impliquent que $\Delta m_{\odot}^2 \simeq 7.6 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$.

\exists oscillations des neutrinos atmosphériques (Super-Kamiokande). Les muons des rayons cosmiques interagissent dans l'atmosphère, produisant des ν_μ . L'expérience compare le flux des ν_μ venant d'en haut (down) avec celui des ν_μ venant d'en bas (up), à travers la terre. On observe

$$\frac{\phi_{\text{up}}}{\phi_{\text{down}}} = 0.54 \pm 0.045 .$$

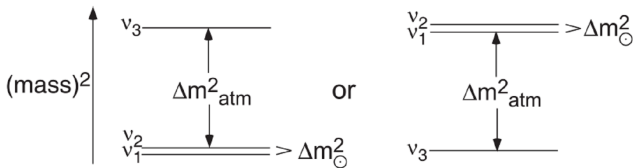
Flux $\neq 1 \implies$ le ν_μ oscille en d'autres neutrinos: $\nu_\mu \rightarrow \nu?$.

Faisceaux de neutrinos: on utilise des collisionneurs pour produire des neutrinos. On les envoie quelques centaines de km à travers la terre à un détecteur. E.g. K2K: utilise des ν_μ produits à KEK, étudie $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. T2K: $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ observé. On trouve que ν_τ dans Super-Kamiokande est principalement ν_τ , que le mélange est (presque) maximal, et que $\Delta m_{atm}^2 \simeq 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

Kamland: observation d'antineutrinos venant de réacteurs. On compare le flux avec celui qu'on s'attendait s'il n'y avait pas d'oscillations. Si ce rapport $\neq 1 \implies$ oscillations des neutrinos. On trouve

$$\frac{\phi_{obs}}{\phi_{pas \ d'osc}} = 0.611 \pm 0.085 \text{ (stat)} \pm 0.041 \text{ (syst)} .$$

Alors, $\Delta m_{\odot}^2 \simeq 7.6 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ et $\Delta m_{atm}^2 \simeq 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \implies$ deux possibilités pour le spectre de masses des neutrinos:



La matrice de mélange des neutrinos est paramétrisée par 3 angles et 3 phases (en supposant 3 neutrinos):

$$\begin{array}{c}
 \nu_e \\
 \nu_\mu \\
 \nu_\tau
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\
 c_{12} e^{i\alpha_1} & s_{12} e^{i\alpha_2} & s_{13} e^{-i\delta} \\
 -c_{23} s_{12} e^{i\alpha_1} & c_{23} c_{12} e^{i\alpha_2} & s_{23} \\
 s_{23} s_{12} e^{i\alpha_1} & -s_{23} c_{12} e^{i\alpha_2} & c_{23}
 \end{bmatrix}$$

Remarque: ν_3 est l'état propre isolé, que ca soit plus léger ou plus lourd que les autres. Ici, on utilise le fait que s_{13} est petit – on a mis $c_{13} = 1$ et on a négligé le terme proportionnel à s_{13} dans les éléments U_{21} , U_{22} , U_{31} , U_{32} .

Les oscillations des neutrinos atmosphériques ont montré que $\sin^2(2\theta_{23}) > 0.92$, ce qui indique que $2\theta_{23} \simeq \pi/2$. Il est donc une bonne approximation de mettre $s_{23} = c_{23} = 1/\sqrt{2}$. Les oscillations des neutrinos solaires donnent

$$\sin^2(2\theta_{12}) = 0.861^{+0.026}_{-0.022} .$$

Si on néglige U_{13} , les états propres de masse sont approximativement

$$\begin{aligned}\nu_3 &\sim \nu_+ , \\ \nu_2 &\sim c_{12}\nu_- - s_{12}\nu_e , \\ \nu_1 &\sim s_{12}\nu_- + c_{12}\nu_e ,\end{aligned}$$

où $\nu_{\pm} \equiv (\nu_{\mu} \pm \nu_{\tau})/\sqrt{2}$.

2012: L'expérience Daya Bay, qui étudie les oscillations des neutrinos des réacteurs, a mesuré le taux de disparition de neutrinos $\bar{\nu}_e$ et a trouvé que

$$\sin^2(2\theta_{13}) = 0.092 \pm 0.016 \text{ (stat)} \pm 0.005 \text{ (syst)} .$$

Ceci implique une valeur non-nulle pour θ_{13} à 5.2σ .

Comme θ_{13} est non-nul, on a la possibilité de la violation CP dans les oscillations des neutrinos à cause de la *phase de Dirac* δ . Signal: $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \neq P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}$.

2017: T2K a annoncé que $\delta_{CP} \in [-171^\circ, -34^\circ]$ (hierarchie normale) ou $[-88^\circ, -68^\circ]$ (hierarchie inversée), 95% C.L.

Finalement, α_1 et α_2 sont des phases reliées au fait que les neutrinos sont Majorana. Ces *phases de Majorana* violent aussi CP, mais leurs valeurs sont inconnues. Elles pourraient être importantes dans la double désintégration beta sans neutrinos, ou la leptogenèse.

8 novembre, 2015: le Breakthrough Prize in Fundamental Physics de 2016 a été décerné aux 5 expériences mesurant les oscillation des neutrinos: SNO, Super-Kamiokande, Kamland, T2K/K2K, et Daya Bay.

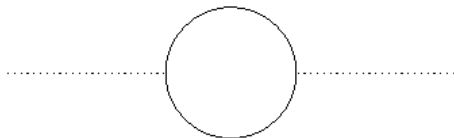
Au-delà du Modèle Standard

Le Modèle Standard décrit les interactions forte, faible et électromagnétique par le groupe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, brisé à $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ à basse énergie. Plusieurs prédictions: existence du Z^0 , couplages de jauge trilineaires, corrections radiatives, boson de Higgs, etc. Tout a été confirmé. À présent, (presque) toutes les données sont décrites par le MS. Il n'y a aucun doute que le MS est correct (au moins à une première approximation).

Mais: le MS a ses lacunes. e.g., les trois forces: pas unifiées. La gravité? Plusieurs questions laissées sans réponse: pourquoi 3 familles? Pourquoi les particules ont-elles les charges qu'elles ont? Leurs masses? De plus, il y a plus de 20 paramètres arbitraires.

Lacunes: philosophiques? physiques? Cependant, il y a un problème plus fondamental. La symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est brisée à $U(1)_{em}$ par le vev d'un champ de Higgs, dû au fait que le terme de masse du potentiel de Higgs a le "mauvais" signe, $-\mu^2$. Le vev: $v \sim \mu/\sqrt{\lambda}$ et prend la valeur ~ 250 GeV. Tous les termes dans le potentiel devraient être du même ordre de grandeur $\implies \mu$ et $\sqrt{\lambda}$ sont $O(100$ GeV).

Masse du Higgs: $m_H \sim \mu \implies m_H = O(100 \text{ GeV})$. Mais: corrections radiatives:



Boucle: fermions ordinaires + fermions à des énergies plus élevées. Or, la gravité devient aussi forte que les autres forces à une énergie de $\sim 10^{19} \text{ GeV}$ (l'échelle de Planck) \implies gravité quantique \implies nouvelles particules à cette échelle.

Mais: la correction radiative diverge. On "régularise" en coupant l'intégrale à l'échelle $\Lambda \implies$ la masse du Higgs acquiert une correction $\sim \Lambda$, où $\Lambda \sim 10^{19} \text{ GeV}$.

Comment expliquer que $m_H \sim 100 \text{ GeV}$? Renormalisation: $m_H = m_H^0 + \Lambda$, où m_H^0 est inconnu \implies on choisit $m_H^0 = m_H - \Lambda$.

Mais: on a $m_H^0 = O(\Lambda)$. Pour avoir $m_H \sim 100$ GeV, il faut que m_H^0 et Λ s'annule à la 17^{ième} décimale.



Canada

9,984,670 km²

—



United States

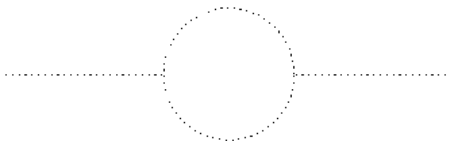
9,826,675 km² = 157,995 km²

Si les deux surfaces s'accordaient à la 17^{ième} décimale, la différence serait 1 Å²!
Ajustement fin \implies inacceptable.

Ceci est le *problème de la hiérarchie*. Comment peut-on garder deux échelles très différentes, comme l'échelle faible et l'échelle de Planck? Après tout, la valeur "naturelle" de m_H est $\sim 10^{19}$ GeV.

Plusieurs solutions proposées. La plus convaincante: la supersymétrie (SUSY), une symétrie entre bosons et fermions. Selon SUSY, chaque particule a un "superpartenaire", une particule avec la même masse mais d'un spin différent.

Les superpartenaires des fermions ordinaires sont des scalaires. Le boson de Higgs reçoit des corrections radiatives de ces scalaires internes:



Point: dans SUSY les deux corrections s'annulent exactement (le diagramme avec les fermions a un signe – supplémentaire). Donc: si SUSY était une bonne symétrie, m_H serait insensible à l'échelle à hautes énergies.

Mais: nous n'observons pas de superpartenaires \implies SUSY n'est pas une bonne symétrie, elle est brisée. Quelle échelle? La masse des scalaires est de l'ordre de l'échelle de la brisure de SUSY \implies ceci brise l'égalité entre les deux diagrammes de corrections radiatives de la masse du Higgs. Afin de garder $m_H \sim 100$ GeV, il faut briser SUSY à cette échelle. Donc: on s'attend à observer des superpartenaires avec des masses $\lesssim 1$ TeV.

La recherche de la supersymétrie est un des buts principaux de la physique des particules expérimentale. e.g., le LHC est censé chercher le Higgs, mais son but réel est de chercher SUSY.

2019: le LHC n'a toujours pas observé des signes de SUSY.

La QED est basée sur le groupe $U(1)$, qui est abélien. Nous avons vu que la valeur de α augmente lorsque l'énergie augmente. La QCD est basée sur le groupe $SU(3)_C$, qui est non-abélien. À cause de ce fait, la valeur de α_s diminue lorsque l'énergie augmente.

MS: $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Les constantes de couplage (ccs) de $SU(3)_C$ et $SU(2)_L$ diminuent avec l'énergie, tandis que celle de $U(1)_Y$ augmente. On a mesuré toutes ces ccs à $q^2 \simeq 0$ et $q^2 = M_Z^2 \implies$ on peut les extrapoler à des énergies encore plus élevées. (Résultats à venir.)

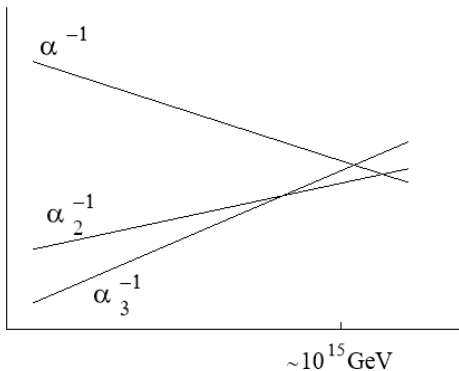
Le MS n'unifie pas les 3 forces, mais on peut construire des vraies théories d'unification. Plus simple: $SU(5)$ (contient le MS comme sous-groupe).

La représentation **5** contient les quarks \bar{d}_L (3 composantes en haut) et le doublet de $SU(2)_L$ (ν_e, e)_L (2 composantes en bas) \implies générateurs de $SU(3)_c$ et $SU(2)_L$ sont les parties 3×3 (en haut, à gauche) et 2×2 (en bas, à droite) des générateurs 5×5 de $SU(5)$. Le générateur $U(1)_{em}$ engendre l'espace au complet:

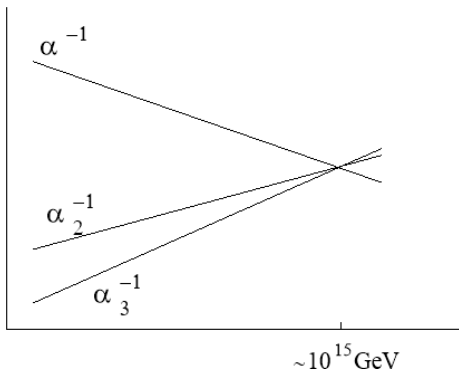
$$Q_{em} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & & \\ & \frac{1}{3} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} .$$

$SU(5)$ a des problèmes (e.g., la désintégration du proton). Cependant, un avantage est qu'il y a une seule constante de couplage \implies prédiction: les constantes de couples du MS devraient s'unifier à hautes énergies.

L'échelle d'unification est $\sim 10^{15}$ GeV. Mais: si on extrapole les constantes de couplage à cette énergie, incluant toutes les particules des trois familles, il n'y a pas d'unification:



Mais: il faut inclure toutes les particules qui contribuent aux corrections radiatives. Si SUSY est correcte, il devrait y avoir des particules avec des masses d' $O(1)$ TeV. Si on inclut ces particules:



Dans ce cas, on a unification des constantes de couplage!

Ceci ne prouve rien. Il y a plusieurs nouvelles particules qui pourraient donner l'unification des constantes de couplage. Mais: c'est une preuve indirecte pour SUSY.

La Matière Sombre

Il y avait des anomalies dans le mouvement des planètes dans notre système solaire
⇒ soit (i) il faut modifier les lois de la gravitation ou (ii) \exists objets non-observés.

Exemples: (i) Le mouvement anormal de Mercure a mené au développement de la relativité générale. (ii) À cause du mouvement anormal d'Uranus, Le Verrier a prédit l'existence d'une autre planète; une fois la prédiction connue, Neptune a été découvert (1846).

\exists des anomalies dans des systèmes astrophysiques, dont la grandeur varie entre les échelles galactique et cosmologique. Pour expliquer ces phénomènes, il faut soit (i) supposer une modification des lois de la gravitation et/ou de la relativité générale ou (ii) supposer l'existence d'une grande quantité de matière non-observée, *la matière sombre*. Il s'avère que la deuxième solution est la plus simple et convaincante.

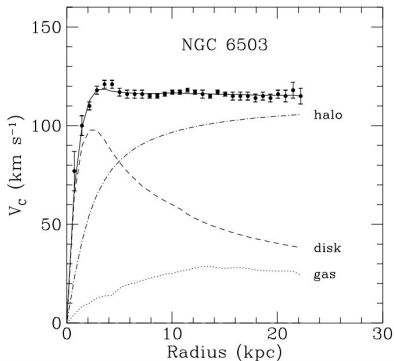
Signaux de la matière sombre:

1. L'échelle galactique: les courbes de rotation des galaxies. Pour des objets en orbite, la force centrifuge égale la force gravitationnelle:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \implies v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}},$$

où $M(r) = 4\pi \int \rho(r)r^2 dr$.

De la courbe de rotation on voit que $v(r)$ est constant. Ceci implique qu'il y a un halo avec $M(r) \propto r$ et $\rho(r) \propto 1/r^2$.



2. Amas de galaxies: \exists plusieurs façons de mesurer la masse d'un amas de galaxies. Thermodynamique: la température du gaz à l'extérieur d'un amas de galaxies:

$$kT \approx (1.3-1.8) \text{ keV} \left(\frac{M(r)}{10^{14} M_{\odot}} \right) \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right),$$

où $M(r)$ est la masse à l'intérieur du rayon r . Température mesurée à l'aide des rayons X venant du gaz: $kT \approx 10 \text{ keV}$. C'est en désaccord avec la température qu'on trouve si $M(r)$ est la masse baryonique \implies il y a une quantité importante de matière sombre à l'intérieur des amas de galaxies.

3. L'échelle cosmologique: (i) Le Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) a mesuré le fond diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background). Ses données contraignent fortement les quantités de baryons et de matière.

Relativité générale: les équations d'Einstein dépendent du paramètre $k = -1, 0, +1$. $k = -1$: univers ouvert, $k = 0$: univers plat, $k = +1$: univers fermé. Quand la densité d'énergie de l'univers égale ρ_c , l'univers est plat. Définition: pour un ensemble de particules de type i , $\Omega_i \equiv \rho_i / \rho_c$.

Quand on combine les données du WMAP avec celles d'autres expériences plus petites, on trouve des valeurs pour les quantités de baryons et de matière dans l'univers. Les dernières valeurs sont (Particle Data Group)

$$\Omega_b h^2 = 0.022 \quad , \quad \Omega_{\text{DM}} h^2 = 0.119 \quad .$$

(ii) Le télescope Hubble: on pensait que l'expansion de l'univers se ralentissait à cause de la gravité. Ce n'est pas le cas: l'expansion de l'univers est en accélération. Dû à *l'énergie sombre*. On a

$$\Omega_b = 0.049 \quad , \quad \Omega_{\text{DM}} = 0.259 \quad , \quad \Omega_\Lambda = 0.692 \quad .$$

Donc, l'univers est composé de 5% matière ordinaire, 26% matière sombre et 69% énergie sombre.

De quoi la matière sombre est-elle composée? MS: le seul candidat est le neutrino. Problème: on peut montrer que la densité relique est

$$\Omega_\nu h^2 = \sum_i^3 \left(\frac{m_i}{93 \text{ eV}} \right) .$$

Or, les neutrinos sont très légers. La désintégration β :

$$m_\nu < 2.05 \text{ eV} \implies \Omega_\nu h^2 < 0.07 ,$$

ce qui est moins que $\Omega_{\text{DM}} h^2$. De plus, $\Delta m_{\odot}^2 \simeq 7.6 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ et $\Delta m_{\text{atm}}^2 \simeq 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, ce qui suggère que $m_\nu \lesssim O(0.05 \text{ eV})$. Dans ce cas, $\Omega_\nu h^2$ est plus d'un ordre de grandeur plus petit. Donc: les neutrinos ne peuvent pas être la composante principale de la matière sombre.

Conclusion: le MS ne fournit pas de bon candidat pour la matière sombre. C'est-à-dire: pour expliquer la matière sombre, il faut chercher au-delà du MS. (En fait, on peut dire que la matière sombre est la preuve qu'il existe de la nouvelle physique.) Ceci est un exemple typique de l'étroite interaction entre la physique des particules, la cosmologie et l'astrophysique.

N'importe quelle particule proposée pour être la matière sombre doit satisfaire à plusieurs contraintes:

- Elle doit être neutre.
- Elle doit avoir la bonne densité relique ($\Omega_{\text{DM}} = 0.259$). Ceci implique qu'elle doit être stable (souvent assuré par une symétrie) ou avoir un temps de vie plus long que l'âge de l'univers ($\tau > 3.4 \times 10^{24}$ s).
- L'évolution de l'univers: lorsque l'univers devient dominé par la matière, les baryons sont piégés dans des puits de potentiel créés par la matière sombre. Ensuite, leurs perturbations en densité croissent et elles forment les structures actuelles de l'univers. Pour que ce mécanisme fonctionne, il faut que la matière sombre soit "froide", c'est-à-dire non-relativiste avant la domination par la matière. Ceci demande que la matière sombre soit assez massive \implies WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles). (Par contre, les neutrinos sont "chauds".)
- Elle doit être cohérente avec la BBN (la nucléosynthèse du Big Bang). Elle doit laisser l'évolution stellaire inchangée. Elle doit respecter les contraintes sur les auto-interactions.

- Elle doit respecter les contraintes de la recherche directe pour la matière sombre: $\chi N \rightarrow \chi N$. Le signal est le recul du noyau + de l'énergie manquante.
- Elle doit respecter les contraintes de la recherche indirecte pour la matière sombre. Deux particules de la matière sombre peuvent s'annihiler en deux particules du MS, ce qui résulte (éventuellement) en l'émission de rayons gamma. La détection de ces rayons gamma indiquera la présence de la matière sombre et le spectre en énergie des rayons gamma donnera des indices quant aux produits de l'annihilation.
- Elle doit respecter les autres contraintes astrophysiques (sur les neutrinos, rayons X, etc.).
- On doit être capable de la détecter expérimentalement. (Sinon, il n'est pas possible de tester l'hypothèse qu'elle soit la matière sombre.)

Quelques candidats au-delà de la MS pour la matière sombre:

- Neutrinos “stériles”: neutrinos sans nombres quantiques du MS. Quelques problèmes avec la densité relique, pas exactement froid. Pas exclu complètement, mais pas le meilleur candidat.
- Axions: particules introduites afin de résoudre le problème de la violation CP dans l'interaction forte. Bon candidat.
- SUSY: (i) sneutrinos: LH – exclus à cause des contraintes de la recherche directe; RH – bon candidat. (ii) gravitinos: problèmes avec la BBN – pas le meilleur candidat. (iii) axinos: bon candidat, mais se trouve dans seulement un sous-ensemble des modèles supersymétriques, difficile à détecter. (iv) le neutralino le plus léger: dans le MSSM, \exists 4 neutralinos – les superpartenaires de W_3 et B , 2 Higgsinos. Ils se mélangent – un est le plus léger, les autres sont plus lourds et se désintègrent. Le neutralino le plus léger est le candidat préféré pour la matière sombre.
- Beaucoup d'autres possibilités.

Mot de la Fin

La priorité en physique des particules est actuellement la recherche de la physique au-delà du Modèle Standard. Côté phénoménologie: e.g., SUSY, modèles LR (composantes gauche et droite traitées sur un pied d'égalité), grande unification, unification des familles, théorie des cordes [on inclut la gravité (?)]. Plus modeste: études de nouvelles particules, telles qu'un Z' , nouveaux fermions, scalaires, etc. Il y a aussi des études plus mathématiques.

Nous croyons tous qu'il doit exister de la physique au-delà du MS. Nous poursuivons de la recherche théorique et expérimentale sur ce sujet afin de trouver la "nouvelle physique".