Chapitre 2: Relativité

1 La description des phénomènes physiques

Pour exprimer les lois de la physique il faut utiliser un système de référence (le plus souvent ce dernier sera constitué de trois axes mutuellement orthogonaux) et une horloge. En physique des particules, le système de référence sert à préciser la position des particules dans l'espace et l'horloge l'instant auquel se produit un événement. Existe-t-il un système de référence privilégié, une horloge privilégiée, pour décrire les phénomènes physiques? Notre principe de relativité affirme que non. Ceci implique que les lois de la physique sont invariantes dans certaines transformations de l'espace et du temps que nous allons préciser. Comme dans ce qui suit nous allons nous limiter à la *relativité restreinte* ces transformations appartiendront au *groupe de Lorentz inhomogène*. L'invariance dite *invariance de Lorentz* est l'un des piliers de la physique contemporaine. Avant d'arriver au groupe de Lorentz considérons quelques exemples plus simples.

2 Les rotations d'espace

Il est naturel d'affirmer que la description des phénomènes physiques ne dépend pas de l'orientation du système de référence. Ceci ne contredit pas le fait que les calculs pourront être plus simples dans un système convenablement choisi. Dans une rotation effectuée autour d'un axe passant par l'origine O la quantité $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ est invariante. Nous allons nous intéresser à toutes les transformations qui laissent la quantité r^2 invariante. Il sera commode d'utiliser les notations suivantes pour les coordonnées d'espace:

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z$$

On aura donc:

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i = x_i x_i$$

en sous-entendant le signe somme lorsque celle-ci porte sur un indice répété. Considérons toutes les transformations linéaires homogènes sur les coordonnées d'espace qui laissent r^2 invariant:

$$x'_i = a_{ij} x_j \qquad \text{avec} \qquad x'_i x'_i = x_i x_i$$

On a

$$x'_i x'_i = a_{ij} x_j a_{ik} x_k \qquad \text{et} \qquad x_i x_i = x_j \delta_{jk} x_k$$

δ_{jk} est le symbole de Kronecker, $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$, $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$. D'où

$$(a_{ij} a_{ik} - \delta_{jk}) x_j x_k = 0 \qquad \text{pour tous les} \qquad x_j x_k$$

Ce qui entraine $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$, ou encore $a^t_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}$, en introduisant la matrice a^t, transposée de la matrice a.

On a finalement $(a^t a)_{jk} = \delta_{jk}$ soit en notation matricielle $a^t a = I$, où I est la matrice unité (3×3).

Une matrice qui satisfait à la condition $a^t a = I$ est dite *matrice orthogonale*.

3 Le groupe orthogonal à 3 dimensions

Les matrices (3×3) orthogonales forment un groupe , le *groupe orthogonal à 3 dimensions O(3).* En effet, les conditions suivantes sont satisfaites:

- Le produit de deux matrices (3×3) orthogonales est une matrice (3×3) orthogonale.

  Soit $a^{(3)} = a^{(1)}a^{(2)}$ avec $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$ orthogonales. Alors $a^{t(3)}a^{(3)} = a^{t(2)}a^{t(1)}a^{(1)}a^{(2)} = I$ puisque $a^{t(1)}a^{(1)} = I$ et $a^{t(2)}a^{(2)} = I$
- La propriété d'associativité est satisfaite (propriété générale du produit matriciel)
- Il existe dans l'ensemble l'élément neutre. C'est la matrice unité, qui, évidemment, est orthogonale.
- A toute matrice a on peut faire correspondre une matrice inverse puisque $a^t a = I$. On a évidemment $a^{-1} = a^t$.

Etudions maintenant ce groupe $O(3)$ un peu plus en détail.

On a:

$$det(a^t a) = det(I) = 1$$

soit

$$det(a^t)det(a) = 1$$

Comme

$$det(a^t) = det(a)$$

on trouve

$$[det(a)]^2 = 1$$

d'où

$$det(a) = \pm 1$$

Il y a donc deux sous-ensembles de matrices dans $O(3)$. Celles qui ont $det(a) = +1$ forment un groupe, sous-groupe de $O(3)$ et désigné par $SO(3)$, groupe *spécial orthogonal.* C'est en fait le groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions. Les éléments de $SO(3)$ forment une nappe connexe qui contient l'élément neutre. On peut se déplacer dans cette nappe en variant de façon continue les paramètres (il y en a trois: deux angles polaires pour définir l'axe de rotation et un angle de rotation). Comme exemple de matrice de $SO(3)$ voici la matrice qui représente une rotation autour de l'axe Oz:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Des exemples de matrices de $O(3)$ avec déterminant -1 sont:

$$\pi_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et:

$$\pi = \pi_x \pi_y \pi_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que:

$$\pi_x \pi_y = \pi_y \pi_x = R_z(\pi)$$

$$\pi_y \pi_z = \pi_z \pi_y = R_x(\pi)$$

$$\pi_z \pi_x = \pi_x \pi_z = R_y(\pi)$$

Les opérations π_x, π_y, π_z et P représentent respectivement des symétries par rapport aux plans yOz, zOx et xOy et par rapport à l'origine O. A des rotations près π_x, π_y, π_z et P sont équivalentes. On définit généralement l'opération *parité* par π, mais ce peut être aussi bien π_x, π_y ou π_z.

4 Translations et rotations. Groupe des déplacements

Considérons maintenant une transformation plus générale

$$x'_i = a_{ij} x_j + b_i$$

avec

$$a^t a = I$$

et des b_i arbitraires.

Une telle transformation (inhomogène) inclut les translations d'espace. Elle conserve la distance entre deux points de l'espace $\delta x_i \delta x_i$. De telles transformations forment un groupe, le *groupe des déplacements*:

$$x''_i = a^{(2)}_{ij} x'_i + b^{(2)}_i = a^{(2)}_{ij} \left[a^{(1)}_{jk} x_k + b^{(1)}_j \right] + b^{(2)}_i$$

$$= a^{(2)}_{ij} a^{(1)}_{jk} x_k + a^{(2)}_{ij} b^{(1)}_j + b^{(2)}_i$$

ce qui peut s'écrire

$$x''_i = a^{(3)}_{ik} x_k + b^{(3)}_i$$

où $a^{(3)} = a^{(2)} a^{(1)}$ est une matrice orthogonale et $b^{(3)}$ un nouveau vecteur arbitraire. Les translations et les rotations constituent des sous-groupes du groupe des déplacements. Le sous-groupe des translations est *abélien*, ce qui n'est pas le cas pour le sous-groupe des rotations.

- La propriété d'associativité peut se démontrer facilement.
- L'élément neutre correspond à $a = I$ et $b = 0$.
- A toute transformation correspond une transformation inverse. Reprenons les expressions écrites plus haut et faisons $a^{(3)} = I$ et $b^{(3)} = 0$. On montre alors que la transformation inverse de $[a, b]$ est $[a^t, -a^t b]$.

5 Invariances par rotation et par translation

Nous postulerons que toutes les lois de la physique sont invariantes par rotation et par translation. L'expérience confirme ce postulat avec une grande précision. Par contre, certains phénomènes physiques ne sont pas invariants dans la parité (interactions faibles). Nous reviendrons sur ce point par la suite.

6 Inclusion de la variable *temps*

Nous postulerons que les lois de la physique ne dépendent pas de l'origine choisie pour mesurer le temps. Il en résulte l'invariance par translation du temps, qui se définit par $t' = t + \tau$, où τ est un temps arbitraire. De telles transformations forment évidemment un groupe (abélien). On peut aussi imaginer que dans un système de référence on fasse tourner l'horloge à l'envers. D'où une généralisation des transformations précédentes: $t' = \epsilon t + \tau$ où $\epsilon = \pm 1$. Les transformations avec $\epsilon = -1$ incluent l'opération de *renversement du temps*. En physique des particules presque tous les phénomènes sont invariants par renversement du temps. Ce n'est pas le cas cependant pour certaines désintégrations des mésons K.

7 Systèmes de référence en mouvement relatif

Jusqu'ici nous n'avons pas considéré des transformations qui "mélangent" espace et temps. On peut encore généraliser les résultats précédents en considérant deux systèmes de référence en mouvement relatif (vitesse relative $\vec{v}$). On arrive ainsi au *groupe de Galilée*, défini par:

$$x'_i = a_{ij} x_j + b_i + V_i t$$

$$t' = \epsilon t + \tau$$

Ces tranformations forment un groupe, ce qui peut se démontrer facilement. Une propriété de ce groupe est l'addition des vitesses, soit;

$$V_i^{(3)} = V_i^{(2)} + V_i^{(1)}$$

de sorte qu'il n'y a aucune limite à la vitesse relative de deux systèmes. A première vue certains phénomènes physiques semblent être invariants dans le groupe de Galilée. C'est le cas des lois de la mécanique et la formulation de Newton présente effectivement cette invariance. Cependant, cette conclusion repose sur des expériences peu précises et réalisées avec des vitesses faibles. Par contre, les lois de l'optique et de l'électromagnétisme (par exemple les équations de Maxwell) ne sont pas invariantes dans le groupe de Galilée. Et ces lois peuvent être vérifiées avec un très haut degré de précision. C'est pourquoi le groupe de Galilée doit être abandonné comme groupe d'invariance pour les lois de la physique. Il reste quand même une bonne approximation pour les lois de la mécanique dans la mesure où les vitesses sont petites par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide, soit $c = 3 \times 10^8$ m/s.

8 Le groupe de Lorentz

Un résultat expérimental très précis est l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide (expérience de Michelson). Deux observateurs en mouvement relatif rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre mesurent la même vitesse c. Dans les deux systèmes de référence, que nous relierons par une transformation linéaire sur les coordonnées d'espace et de temps, un signal lumineux est décrit par les relations:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0 \qquad \text{(système S)}$$

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0 \qquad \text{(système } S'\text{)}$$

Une relation entraine l'autre et réciproquement. En utilisant l'abbréviation

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

on doit donc avoir une relation de la forme:

$$(\Delta l')^2 - c^2(\Delta t')^2 = A[(\Delta l)^2 - c^2(\Delta t)^2]$$

A cause de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace et du temps, A ne peut dépendre que du module de la vitesse relative $\vec{v}$ des deux systèmes. Aucun des deux systèmes n'étant privilégié par rapport à l'autre, il doit y avoir réciprocité, soit:

$$(\Delta l)^2 - c^2(\Delta t)^2 = A[(\Delta l')^2 - c^2(\Delta t')^2]$$

d'où l'on tire $A^2 = 1$, soit $A = \pm 1$. Nous éliminerons la solution $A = -1$ comme conduisant à une physique complétement différente de celle que nous voulons décrire (ce qui ne veut pas dire que cette question est dénuée d'intérêt). Nous retiendrons donc:

$$(\Delta l')^2 - c^2(\Delta t')^2 = (\Delta l)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

Il y a donc invariance de la quantité $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2$ (mais pas nécessairement invariance de $(\Delta l)^2$ et de $(\Delta t)^2$ séparément comme c'est le cas pour le groupe de Galilée. Il est commode d'introduire de nouvelles notations pour les coordonnées d'espace et de temps:

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = ict$$

Nous définirons un *événement* comme associé à un point de coordonnées $x_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ dans un espace à 4 dimensions (espace-temps ou encore *univers*). On trouve alors que $(\Delta s)^2 = -(\Delta x_\mu)(\Delta x_\mu)$. Cette quantité $(\Delta s)^2$ peut être positive, nulle ou négative suivant la nature de l'*intervalle* entre deux événements:

$$\begin{array}{lcl} (\Delta s)^2 & > & 0 \quad \text{intervalle du genre } \textit{temps} \\ (\Delta s)^2 & = & 0 \quad \text{intervalle du genre } \textit{lumière} \\ (\Delta s)^2 & < & 0 \quad \text{intervalle du genre } \textit{espace} \end{array}$$

Nous allons maintenant rechercher la transformation linéaire la plus générale sur les x_μ qui conserve $(\Delta s)^2$. Nous écrirons cette transformation sous la forme:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu$$

où b_μ est une translation arbitraire d'espace-temps et a une matrice que nous allons préciser. Pour les besoins de la démonstration on peut oublier les translations et raisonner sur une transformation homogène $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$. On retombe alors sur un problème déjà traité. Le résultat est que la matrice a doit satisfaire à la relation $a^t a = I$. Il faut cependant se rappeler que les éléments de matrice $a_{ij}, (i,j = 1,2,3)$ et a_{44} sont des nombres réels et que les a_{i4} et a_{4i} sont imaginaires purs. On peut vérifier que les transformations avec $a^t a = I$ forment un groupe, le *groupe de Lorentz homogène*. Si l'on inclut les translations on obtient le *groupe de Lorentz inhomogène*. La plupart des propriétés peuvent s'étudier en considérant le groupe homogène. On démontre facilement que $det(a) = \pm 1$. Il y a donc une première dichotomie dans les éléments du groupe. Nous allons donner quelques exemples de transformations de Lorentz homogènes avec $det(a) = 1$.

De toute évidence, le groupe de Lorentz admet comme sous-groupe le groupe des rotations. Par exemple la rotation autour de Oz considérée plus haut s'écrit:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une autre transformation de Lorentz avec $det(a) = 1$ est la suivante:

$$L_z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\phi & -i\sinh\phi \\ 0 & 0 & i\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

Nous allons vérifier que cette transformation est liée à la situation de deux observateurs en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Pour simplifier on peut ignorer les coordonnées x et y. Supposons que le point O ($z = 0$) se déplace à la vitesse V dans le système S', de sorte que dans ce dernier système l'équation du mouvement soit $z' = Vt'$. La transformation donne:

$$z' = z\cosh\phi - i(ict)\sinh\phi = z\cosh\phi + ct\sinh\phi$$

$$ict' = -iz\sinh\phi + ict\cosh\phi$$

Pour $z = 0$ on trouve:

$$z' = ct\sinh\phi \qquad \text{et} \qquad t' = t\cosh\phi$$

soit

$$z' = ct'\tanh\phi$$

à identifier à $z' = Vt'$, ce qui donne

$$\tanh\phi = \frac{V}{c}$$

D'où on déduit:

$$\cosh\phi = \gamma \qquad \sinh\phi = \beta\gamma$$

On a posé $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. D'où:

$$z' = \gamma(z+Vt) \qquad t' = \gamma\left(t + \frac{\beta z}{c}\right)$$

Notons ici que l'*approximation non-relativiste* consiste à faire tendre c vers l'infini, soit $\beta \to 0$ et $\gamma \to 1$. On trouve:

$$z' = z + Vt \qquad \text{et} \qquad t' = t$$

C'est une transformation de Galilée. Le groupe de Galilée est une approximation du groupe de Lorentz, valable lorsque $\beta << 1$.

9 La parité

Considérons les transformations:

$$\pi_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et:

$$\pi = \pi_x\pi_y\pi_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce sont des exemples de transformations de Lorentz avec $det(a) = -1$. Remarquons que comme précédemment on a $\pi_x\pi_y = R_z(\theta)$, etc...

10 Le renversement du temps

C'est une transformation de Lorentz, avec déterminant -1, définie par:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarquera que, contrairement à ce qui a été dit pour les produits $\pi_x\pi_y$, etc..., les produits $\pi_x T, \pi_y T$ et $\pi_z T$ ne peuvent pas être identifiés à des transformations de Lorentz dites *spéciales* telles que $L_x(\phi)$, $L_y(\phi)$ ou $L_z(\phi)$. Ceci tient au fait que $\cosh\phi$ est toujours positif. La variable *temps* est bien différente des variables d'espace même si en la définissant comme une variable imaginaire elle entre dans l'expression du $(\Delta s)^2$ de la même façon que les variables d'espace. On ne pourra donc pas changer le signe de a_{44} de façon continue comme on peut le faire pour a_{11}, a_{22} et a_{33}. En conséquence il s'introduit une seconde dichotomie dans les éléments du groupe, suivant que a_{44} est positif ou négatif. Le groupe de Lorentz (qu'il soit homogène ou inhomogène) se compose donc de quatre nappes disjointes: $L_+^\uparrow$, $L_+^\downarrow$, $L_-^\uparrow$ et $L_-^\downarrow$. Le signe + ou − indique le signe de $det(a)$ et le sens de la flèche indique s'il y a ou non renversement du temps. La nappe $L_+^\uparrow$ ($det(a) = +1$, pas de renversement du temps) constitue un groupe, le *groupe propre de Lorentz.* Les autres nappes ne constituent pas des groupes. On peut former des groupes en réunissant deux nappes comprenant $L_+^\uparrow$. L'invariance dans $L_+^\uparrow$ est l'un des dogmes de la physique moderne. Par contre il n'y a pas invariance universelle dans des opérations telles que P, T ou PT. Ainsi:

- Les interactions faibles violent l'invariance P de façon maximale.
- Il y a une petite violation de l'invariance T dans certaines désintégrations des mésons K.

11 Applications de la transformation de Lorentz

11.1 Contraction des longueurs

Considérons une transformation de Lorentz spéciale

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = \gamma(z + Vt) \qquad t' = \gamma\left(t + \frac{\beta z}{c}\right)$$

Au temps $t = 0$ l'observateur du système S mesure la longueur d'une règle transportée par le système S'. La transformation de Lorentz donne les positions des extrémités de la règle à $t = 0$:

$$z'_2 - z'_1 = \gamma(z_2 - z_1)$$

soit

$$z_2 - z_1 = \sqrt{1 - \beta^2}(z'_2 - z'_1)$$

ou encore

$$L = L'\sqrt{1 - \beta^2}$$

L'observateur S trouve une longueur plus petite pour la règle emportée par S' que pour la même règle mesurée au repos (S a pu mesurer cette règle avant de la mettre en mouvement). Ici il faut noter que les mesures des extrémités de la règle sont des événements simultanés (arrivant au même instant) pour S. Mais ces deux événements ne sont pas simultanés pour S'. Inversement, si S' mesure une règle emportée par S il trouvera aussi une longueur contractée. Il faut bien se garder de voir là une contradiction. En fait les deux observateurs sont d'accord pour annoncer le même résultat: une règle mise en mouvement est raccourcie. Il y a une symétrie parfaite entre les deux systèmes, comme il se doit. La contraction observée existe seulement pour la dimension longitudinale (suivant la direction du mouvement relatif). Il n'y a pas de contraction pour les dimensions transversales (perpendiculaires à la direction du mouvement relatif).

Un exemple de contraction des longueurs est la collision de deux ions lourds relativistes. On s'intéresse à de telles collisions en vue d'étudier des états nucléaires de très haute densité. La chromodynamique quantique prédit un déconfinement des quarks et des gluons à l'échelle du complexe formé par la fusion de deux noyaux en collision. La meilleure façon de réaliser de telles collisions est de faire se rencontrer deux faisceaux d'ions (uranium très fortement ionisé par exemple). Pour un observateur situé dans le système du laboratoire les deux noyaux en collision sont vus comme deux disques plats à cause de la contraction des longueurs dans la direction du mouvement. On gagne un facteur γ^{-1} supplémentaire à cause de la relativité.

11.2 Dilatation du temps

La transformation de Lorentz considérée plus haut peut aussi s'écrire

$$x = x' \qquad y = y' \qquad z = \gamma(z' - Vt') \qquad t = \gamma\left(t' - \frac{\beta z'}{c}\right)$$

Considérons une particule placée en O', origine des coordonnées pour le système S'. On dira que ce système constitue le *système propre* de la particule. Soient deux battements successifs d'une horloge liée à la particule ($z' = 0$). Ils sont tels que:

$$T_2 - T_1 = \gamma(T'_2 - T'_1)$$

soit

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

L'observateur S trouvera donc une période allongée pour l'horloge emportée par S' par rapport à la même horloge observée au repos (S a pu mesurer la période de l'horloge avant de la mettre en mouvement). Ce phénomène de la dilatation est observé quotidiennement par les physiciens des particules. Par exemple, un muon observé au repos a une vie moyenne $\tau_0 = 2.2\mu s$. Ceci signifie que la décroissance du nombre de muons appartenant à un ensemble initial de N_0 muons est exprimée par:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)$$

Les muons cosmiques (produits dans la haute atmosphère) parcourent des distances considérables (on en retrouve dans les mines profondes), ce qui démontre qu'ils disparaissent beaucoup moins vite que si leur vie moyenne était τ_0. Leur vie moyenne est considérablement allongée du fait que leur vitesse est proche de la vitesse de la lumière. Des observations semblables peuvent être faites avec des particules accélérées en laboratoire, avec des *accélérateurs de particules.* C'est d'ailleurs grêce à la dilatation relativiste du temps que l'on peut obtenir des faisceaux de particules dont la vie moyenne propre est très courte (Λ, Σ, etc...).

12 La dynamique relativiste

Que deviennent, en mécanique relativiste, les notions de *vitesse* et d'*accélération* qui furent d'abord introduites en mécanique newtonienne? Pour le comprendre, il faudra avoir présente à l'esprit la façon dont les diverses grandeurs cinématiques se transforment dans le groupe de Lorentz. Nous avons déjà rencontré les coordonnées x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) qui se transforment comme

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu$$

d'où

$$dx'_\mu = a_{\mu\nu} dx_\nu$$

On dira que la loi de transformation de dx_μ est celle d'un *quadrivecteur.* Toute quantité V_μ qui se transforme suivant

$$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu$$

est un quadrivecteur. Que peut-on dire de quantités telles que les composantes de la vitesse $\vec{v}$ (dx/dt, dy/dt et dz/dt)? On voit que dx, dy et dz se comportent comme les trois premières composantes d'un quadrivecteur et que dt se comporte comme la quatrième composante d'un quadrivecteur. Les composantes de $\vec{v}$ ne se transforment donc pas de façon simple dans le groupe de Lorentz. Nous allons introduire des quantités *covariantes*, c'est à dire des quantités qui se transforment de façon bien définie (par exemple comme des quadrivecteurs). Pour cela, remarquons que la quantité

$$ds = \sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$$

est un invariant de Lorentz. Nous allons dériver par rapport à ds pour obtenir des quantités covariantes. Le quadrivecteur défini par:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$$

est appelé *vitesse d'univers.* Il se transforme dans le groupe de Lorentz suivant:

$$u'_\mu = a_{\mu\nu} u_\nu$$

Une précaution cependant: u_μ n'a pas la dimension d'une vitesse, c'est une grandeur sans dimension. Calculons le carré scalaire:

$$u_\mu u_\mu = \frac{dx_\mu dx_\mu}{(ds)^2} = -1$$

On a les relations:

$$\frac{dx_i}{ds} = \beta_i \gamma \quad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$\frac{dx_4}{ds} = i\gamma$$

avec

$$\beta_i = \frac{v_i}{c} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

La quantité définie par $p_\mu = m_0 c u_\mu$ est un quadrivecteur. Ici, m_0 est la *masse propre* de la particule, soit la masse mesurée dans le système propre de la particule (on dit aussi *masse au repos*). Dégageons la signification de p_μ. Avec les composantes d'espace on peut former un trivecteur (de l'espace à trois dimensions, donc pas une quantité covariante de Lorentz):

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \gamma$$

et avec la composante de temps:

$$p_4 = im_0c\gamma$$

Pour interpréter ces quantités, voyons ce qu'elles deviennent dans l'approximation non-relativiste. Pour $\vec{p}$ on trouve

$$\vec{p} = m_0\vec{v}$$

Il est donc normal de considérer $\vec{p}$ comme l'expression relativiste de la *quantité de mouvement* (on dira aussi *impulsion*). Pour la quatrième composante on va développer en série:

$$\frac{cp_4}{i} = m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right] = m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+O\left(\frac{v^4}{c^2}\right)$$

Lorsque v/c tend vers zéro on trouve

$$\frac{cp_4}{i} = m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

On reconnaît immédiatement l'expression non-relativiste de l'énergie cinétique $1/2\ m_0v^2$. Mais il y a aussi le terme constant m_0c^2 qui doit être interprété comme l'*énergie propre* de la particule (on dit aussi *énergie au repos*) liée à la masse. Ce terme constant serait sans intérêt (à part une origine pour mesurer l'énergie d'une particule) si l'énergie propre et l'énergie cinétique ne pouvaient pas se transformer l'une dans l'autre. Mais ces transformations réciproques existent, donnant naissance à des phénomènes de matérialisation et de dématérialisation. Par exemple, une paire électron-positron peut s'annihiler en deux ou trois photons:

$$e^-e^+ \to \gamma\gamma \qquad \text{ou} \qquad e^-e^+ \to \gamma\gamma\gamma$$

et un photon peut se matérialiser en une paire électron-positron (nous verrons que cela exige la présence d'une autre particule afin de conserver quantité de mouvement et énergie):

$$\gamma \to e^-e^+$$

Nous dirons que cp_4/i représente l'énergie totale de la particule (énergie au repos plus énergie cinétique) et nous écrirons:

$$E = m_0c^2+T \qquad \text{avec} \qquad T = m_0c^2(\gamma-1)$$

T est l'énergie cinétique. Comme $p_\mu p_\mu = m_0^2c^2u_\mu u_\mu = -m_0^2c^2$ on a la relation:

$$p^2-\frac{E^2}{c^2} = m_0^2c^2$$

soit encore

$$E^2 = p^2c^2+m_0^2c^4$$

qui est la relation entre énergie totale E et impulsion p ($|\vec{p}|$).

On peut établir d'autres relations:

$$pc = \sqrt{T(T+2m_0c^2)}$$

et

$$\frac{pc}{E} = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{T(T+2m_0c^2)}}{(T+m_0c^2)}$$

13 Les unités

En physique des particules il sera commode d'utiliser des unités d'énergie, d'impulsion et de masse adaptées aux problèmes traités. On choisira comme unité de vitesse la vitesse de la lumière dans le vide. Ceci conduira à poser $c = 1$ dans les formules. Par exemple, on aura:

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

Pour l'énergie on utilisera aussi les multiples de l'électron-volt:

1 Kilo-électron-volt (KeV)	=	10^3 eV
1 Méga-étectron-volt (MeV)	=	10^6 eV
1 Giga-électron-volt (GeV)	=	10^9 eV
1 Téra-électron-volt (TeV)	=	10^{12} eV

Les américains utilisent aussi le BeV (billion-electron-volt) à la place du GeV.

Les impulsions seront exprimées en eV/c, KeV/c, MeV/c, etc...,ou par abus de langage en eV, KeV, MeV, etc... Les masses seront exprimées en eV/c^2, KeV/c^2, MeV/c^2, etc..., ou par abus de langage en eV, KeV, MeV, etc...

14 L'invariant $p_\mu p_\mu$

Le carré scalaire du quadrivecteur p_μ est un invariant de Lorentz (scalaire). On a donc:

$$p'_\mu p'_\mu = p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2$$

Cette propriété a des applications intéressantes en physique des particules et en physique nucléaire. Une transformation de Lorentz importante est celle qui relie le *système du laboratoire* (celui où l'on fait les expériences) et le *système du centre de masse* (le plus approprié pour la description théorique des phénomènes). Ce dernier (C.M.) est défini comme le système de référence dans lequel la quantité de mouvement totale est nulle. Dans le cas le plus simple on aura affaire à un système de deux particules en collision. Avec les accélérateurs "classiques" l'une des particules, dite *particule-cible* est au repos dans le système du laboratoire. L'autre particule, dite *particule du faisceau* est en mouvement et vient bombarder la particule-cible.

Dans le système du laboratoire on a la situation suivante:

$\otimes$ - - - - - - - - - - - - - - - - > $\otimes$

1 (faisceau) $\vec{p}_1$ 2 (cible) $\vec{p}_2 = 0$

et dans le système du centre de masse:

$\otimes$ - - - - - - - - - > < - - - - - - - - - - $\otimes$

$(\vec{p}_1)^*$ $(\vec{p}_2)^*$

avec $(\vec{p}_1)^* + (\vec{p}_2)^* = 0$.

L'invariance de $p_\mu p_\mu$ permet d'écrire:

$$(E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = (E_1^* + E_2^*)^2$$

L'énergie totale dans le système du C.M. sera donc:

$$E^* = E_1^* + E_2^* = \sqrt{(E_1 + m_2)^2 - p_1^2} = \sqrt{m_1^2 + 2m_2E_1 + m_2^2} = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2T_1}$$

et l'énergie cinétique totale dans le système du C.M.:

$$T^* = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2T_1} - (m_1 + m_2)$$

Il est intéressant de voir ce que devient cette expression dans l'approximation non-relativiste:

$$T^* = (m_1 + m_2)\left[\left(1 + \frac{2m_2T_1}{(m_1 + m_2)^2}\right)^{1/2} - 1\right]$$

$$= (m_1 + m_2)\left[1 + \frac{m_2T_1}{(m_1 + m_2)^2} + ... - 1\right]$$

$$= T_1\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$$

C'est l'énergie dans le système du C.M. qui est intéressante car c'est elle qui peut servir à créer de nouvelles particules. A titre d'exemple considérons le cas de deux particules de même masse (collisions proton-proton par exemple). Dans l'approximation non-relativiste on a

$$T^* = \frac{1}{2}T_1$$

L'énergie dans le système du C.M. augmente proportionnellement à l'énergie cinétique du faisceau. Dans le cas relativiste exact:

$$T^* = \sqrt{4m^2 + 2MT_1} - 2M$$

dans l'approximation *ultra-relativiste* on peut négliger M devant T_1 et l'on trouve $T^* = \sqrt{2MT_1}$. l'énergie dans le système du C.M. augmente seulement comme la racine carrée de l'énergie du faisceau. La plus grande partie de l'énergie du faisceau est gaspillée à mouvoir le système du C.M. Il faut, pour créer des particules, dépenser une quantité disproportionnée d'énergie. Prenons comme exemple le SPS du CERN: $T_1 = 500$ GeV et cible fixe ($T_2 = 0$). On obtient $T^* = \sqrt{2 \times 1 \times 500} \sim 30$ GeV, énergie disponible pour créer des particules. Ce n'est évidemment pas assez pour créer les bosons intermédiaires des interactions faibles $W^{\pm}$ et Z^0. D'où l'idée de transformer le SPS du CERN en $S\overline{P}PS$: on fait circuler des protons et des antiprotons dans le même accélérateur, en sens inverse, à la même énergie. A certains endroits désignés les protons et les antiprotons entrent en collision. Le système du C.M. coincide avec celui du laboratoire. Avec des faisceaux de 500 GeV on peut donc atteindre une énergie de 1 TeV, disponible pour la création de particules. Il faudrait un accélérateur de 500 TeV tirant sur cible fixe pour arriver au même résultat. Un tel accélérateur est impossible à construire. C'est ce qui explique la faveur des *collisionneurs* (en anglais *colliders*) auprès des physiciens des particules. Le LEP (Large Electron- Positron Project), au CERN, accélére des électrons et des positrons à 50 GeV ($LEP1$),d'où une énergie totale de 100 GeV. Avec $LEP2$ ces énergies seront doublées ce qui conduira à une énergie totale de 200 GeV. On peut ainsi facilement créer en grande quantité des bosons Z^0 ($LEP1$) puis avec $LEP2$ des paires de bosons W^+-W^-. A Stanford on a développé un projet concurrent du LEP, le SLC (Stanford Linear Collider). Comme son nom l'indique, ce projet fait usage d'un accélérateur linéaire alors que le $S\overline{P}PS$ et le LEP utilisent un accélérateur circulaire. En République Fédérale Allemande, à Hambourg, le projet $HERA$ (High Energy Ring Accelerator) utilisera deux accélérateurs construits dans le même tunnel pour faire des collisions entre des électrons de 30 GeV et des protons de 800 GeV.

Pourquoi vouloir toujours aller à des énergies de plus en plus élevées? C'est parce que beaucoup de théories suggèrent une abondance de particules nouvelles dans la région de masse de 1 TeV. Le projet américain SSC (Superconducting Super-Collider) proposait l'accélération de deux faisceaux de protons de 20 TeV, ce qui aurait donné une énergie totale de 40 TeV. Déjà, les dimensions d'un tel accélérateur auraient été gigantesques (de l'ordre de 100 Km de circonférence). Un accélérateur "classique" tirant sur cible fixe devrait avoir une énergie de 800000 TeV et une circonférence de 4 millions de Km! Le SSC a été abandonné alors que la construction du tunnel avait été achevée.

15 Seuils de production de particules

Une autre application intéressante de l'invariant $p_\mu p_\mu$ concerne les seuils de création de particules. Pour voir de quoi il s'agit, considérons la réaction de production de pions au moyen d'un faisceau de protons frappant une cible fixe d'hydrogène (protons).

$$p\ p \rightarrow p\ n\ \pi^+$$

Pour que cette réaction se produise il faut que les protons incidents aient une énergie suffisante. L'énergie à partir de laquelle la réaction se produit s'appelle *énergie de seuil.* Calculons cette énergie. Nous ferons appel à deux notions: la première est l'invariance du produit $p_\mu p_\mu$ qui nous permet d'affirmer que cette quantité à la même valeur dans le système du laboratoire et le système du C.M. La seconde est la conservation de toutes les composantes de p_μ qui nous permet d'affirmer que le produit $p_\mu p_\mu$ a la même valeur avant et après la réaction.

Dans le système du C.M. l'impulsion totale est nulle. Le seuil correspond évidemment au cas où toutes les particules de l'état final sont au repos (c'est la seule façon de minimiser l'énergie). L'énergie totale est donc

$$E^* = m_p + m_n + m_{\pi^+}$$

Ecrivons maintenant que $p_\mu p_\mu$ a la même valeur dans le système du laboratoire avant la réaction et dans le système du C.M. après la réaction:

$$(T_1 + m_p + m_p)^2 - p_1^2 = (m_p + m_n + m_{\pi^+})^2$$

soit

$$2m_pT_1 + 4m_p^2 = (m_p + m_n + m_{\pi^+})^2$$

Comme les masses du proton et du neutron sont très voisines nous poserons:

$$m_p = m_n = M \qquad \text{et} \qquad m_{\pi^+} = m$$

On trouve alors:

$$T_1 = 2m + \frac{m^2}{2M}$$

Avec $m = 140$ MeV/c^2 et $M = 938$ MeV/c^2 on trouve $T_1 \sim 290$ MeV. En fait, si l'on bombarde des noyaux avec des protons on constate que la réaction démarre à une énergie inférieure à celle qui a été calculée plus haut. La raison est que dans un noyau les nucléons ne sont pas immobiles mais animés de ce qu'on appelle le *mouvement de Fermi.* L'impulsion globale du noyau est nulle dans le système du laboratoire mais il y a des protons de la cible qui vont à la rencontre du faisceau. Pour ceux là l'énergie de seuil se trouve abaissée.

16 L'accélération d'univers

Nous avons déjà défini une vitesse d'univers:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} \qquad (u_\mu u_\mu = -1)$$

Dèrivons une seconde fois par rapport à s:

$$\Gamma_\mu = \frac{du_\mu}{ds} = \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}$$

Γ_μ est un quadrivecteur. Il se transforme comme x_μ et u_μ. D'autre part, comme $u_\mu u_\mu = -1$ on trouve, en dérivant:

$$\frac{d(u_\mu u_\mu)}{ds} = 0$$

ou encore

$$u_\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0$$

soit:

$$u_\mu \Gamma_\mu = 0$$

Les quadrivecteurs u_μ et Γ_μ sont "orthogonaux". Par analogie avec la relation fondamentale de la dynamique newtonienne, $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, écrivons:

$$F_\mu = m_0 c^2 \Gamma_\mu = m_0 c^2 \frac{du_\mu}{ds} = c\frac{dp_\mu}{ds}$$

Le quadrivecteur Γ_μ satisfait à $u_\mu F_\mu = 0$, soit $\vec{v} \cdot \vec{F} + iF_4 = 0$. Les composantes d'espace sont:

$$F_i = c\frac{dp_i}{ds} = \gamma\frac{dp_i}{dt}$$

et la composante de temps:

$$F_4 = c\frac{dp_4}{ds} = i\gamma\frac{dE}{dt}$$

Avec $F_4 = i\vec{v} \cdot \vec{F}$ on a

$$\gamma\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

d'où les relations:

$$\gamma\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \qquad \text{et} \qquad \gamma\frac{dE}{dt}=\vec{v}\cdot\vec{F}$$

Dans l'approximation non-relativiste, on trouve:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \qquad \text{et} \qquad \frac{dE}{dt}=\vec{v}\cdot\vec{F}$$

Ces expressions sont bien connues. La première traduit le changement de quantité de mouvement sous l'action de la force $\vec{F}$, la seconde traduit le changement d'énergie dû au travail de cette force.

17 Etude d'un type de forces

On peut construire un vecteur F_μ à partir de la vitesse d'univers u_μ et d'un tenseur $F_{\mu\nu}$ que nous supposerons antisymétrique et dérivant d'un potentiel quadrivectoriel A_μ:

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

où par convention

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

On peut alors écrire, en introduisant une constante de couplage e, qui représente la force de l'interaction:

$$c\frac{dp_\mu}{ds}=eF_{\mu\nu}u_\nu$$

Désignons les composantes d'espace de A_μ par $\vec{A}$ et sa composante de temps (imaginaire pure) par iV. On peut calculer les composantes non-nulles de $F_{\mu\nu}$:

$$F_{12}=-F_{21}=\partial_x A_y-\partial_y A_x=(\text{rot }\vec{A})_z=B_z$$

De la même façon on a $F_{23}=-F_{32}=B_x$ et $F_{31}=-F_{13}=B_y$. Ensuite:

$$F_{14}=-F_{41}=\partial_x(iV)-\frac{1}{ic}\partial_t A_x=i\Big(\partial_x V+\frac{1}{c}\partial_t A_x\Big)=-iE_x$$

De la même façon: $F_{24}=-F_{42}=-iE_y$ et $F_{34}=-F_{43}=-iE_z$. En résumé on peut présenter le tenseur $F_{\mu\nu}$ sous forme de tableau:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

Revenons à la formule

$$\frac{dp_\mu}{ds}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu$$

Pour $\mu = 1$, on a:

$$\gamma \frac{dp_x}{cdt} = \frac{e}{c}\left[B_z\gamma\frac{v_y}{c} - B_y\gamma\frac{v_z}{c} - iE_x i\gamma\right]$$

soit:

$$\frac{dp_x}{dt} = e(v_y B_z - v_z B_y + E_x)$$

et des expressions semblables pour $\mu = 2, 3$ (obtenues par permutation circulaire des indices). Ce qui donne:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Pour $\mu = 4$ on trouve:

$$\gamma \frac{dp_4}{c\ dt} = \frac{e}{c}\left[iE_x\gamma\frac{v_x}{c} + iE_y\gamma\frac{v_y}{c} + iE_z\gamma\frac{v_z}{c}\right]$$

et comme $p_4 = iE/c$:

$$\frac{dE}{dt} = e\vec{v} \cdot \vec{E}$$

Nous reconnaissons là les équations bien connues régissant le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Ces équations sont très importantes dans le domaine des accélérateurs de particules. La seconde équation, qui gouverne la variation de l'énergie, nous montre que pour accélérer une particule il faut faire agir un champ électrique. On peut obtenir ce dernier de deux façons: à partir d'un potentiel scalaire V ou à partir d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ variable dans le temps.

18 Transformation du champ électromagnétique dans le groupe de Lorentz

Puisque le champ électromagnétique est un tenseur il se transforme suivant:

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\rho} a_{\nu\lambda} F_{\rho\lambda}$$

Considérons le cas de la transformation de Lorentz "spéciale":

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\phi & -i\sinh\phi \\ 0 & 0 & i\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

Nous allons utiliser un système d'unité particulier, dans lequel $\vec{B}$ et $\vec{E}$ ont même dimension. Compte tenu des termes qui sont nuls on obtient:

$$B'_x = F'_{23} = a_{22}(a_{33}F_{23} + a_{34}F_{24}) = \cosh\phi B_x - i\sinh\phi(-iE_y) = \gamma(B_x - \beta E_y)$$

$$B'_y = F'_{31} = (a_{33}F_{31} + a_{34}F_{41})a_{11} = \cosh\phi B_y - i\sinh\phi(iE_x) = \gamma(B_y + \beta E_x)$$

$$B'_z = F'_{12} = a_{11}a_{22}F_{12} = B_z$$

$$-iE'_x = F'_{14} = a_{11}(a_{43}F_{13} + a_{44}F_{14}) = i\sinh\phi(-B_y) + \cosh\phi(-iE_x) = -i\gamma(E_x + \beta B_y)$$

$$-iE'_y = F'_{24} = a_{22}(a_{43}F_{23} + a_{44}F_{24}) = i\sinh\phi B_x + \cosh\phi(-iE_y) = -i\gamma(E_y - \beta B_x)$$

$$-iE'_z = F'_{34} = a_{33}a_{44}F_{34} + a_{34}a_{43}F_{43} = \cosh^2\phi(-iE_z) + \sinh^2\phi(iE_z) = -iE_z$$

En résumé:

$$B'_x = \gamma(B_x - \beta E_y)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + \beta E_x)$$

$$B'_z = B_z$$

$$E'_x = \gamma(E_x + \beta B_y)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_x)$$

$$E'_z = E_z$$

On constate que les composantes “électriques” et “magnétiques” de $F_{\mu\nu}$ se mélangent dans une transformation de Lorentz. Le caractère “électrique” ou “magnétique” est donc essentiellement relatif et dépend du système de référence. Un champ électrique pur dans un certain système apparaîtra avec des composantes magnétiques dans un autre système, et inversement. On voit aussi que la loi de transformation du champ électromagnétique est très différente de celle d'un vecteur. Pour un vecteur les composantes transverses (perpendiculaires à la vitesse $\vec{v}$) sont invariantes. Pour le tenseur $F_{\mu\nu}$ ce sont les composantes longitudinales qui sont invariantes. Citons une application physique de la relativité du caractère électrique ou magnétique. Plusieurs cyclotrons (dont celui de TRIUMF) accélèrent des ions négatifs d'hydrogène (H^-). Ces derniers sont trés faciles à extraire du cyclotron: il suffit de les éplucher, ce qui les convertit en ions H^+ dont la trajectoire est courbée en sens inverse de celle des ions H^-. Il est aussi possible, en épluchant le faisceau à plusieurs endroits, d'extraire plusieurs faisceaux d'énergies différentes. Il y a cependant un inconvénient à accélérer des ions négatifs. Il existe dans le système du laboratoire un champ magnétique statique dont le rôle est de courber la trajectoire des particules. Mais dans le système propre de l'ion en mouvement il y a aussi un champ électrique qui tend à dissocier les ions H^-. Dans de telles machines il faut donc utiliser un champ magnétique pas trop élevé, ce qui conduit à augmenter le rayon du cyclotron, d'où un plus grand encombrement et un coût plus élevé. On doit éviter la dissociation des ions H^- pour deux raisons. D'abord parce que cette dissociation fait perdre des particules et ensuite parce que les particules perdues vont frapper les parois de la chambre à vide et y produire des isotopes radioactifs. Le cyclotron devient de plus en plus radioactif avec l'usage, ce qui est un problème si l'on doit effectuer des opérations de maintenance ou des réparations.

19 Invariants du champ électromagnétique

Considérons la quantité $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ et voyons comment elle se comporte dans une transformation de Lorentz.

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = a_{\mu\rho}a_{\nu\lambda}F_{\rho\lambda}a_{\mu\sigma}a_{\nu\tau}F_{\sigma\tau} = (a^t_{\rho\mu}a_{\mu\sigma})(a^t_{\lambda\nu}a_{\nu\tau})F_{\rho\lambda}F_{\sigma\tau} = \delta_{\rho\sigma}\delta_{\lambda\tau}F_{\rho\lambda}F_{\sigma\tau} = F_{\rho\tau}F_{\rho\tau}$$

Cette quantité $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est donc un invariant de Lorentz. A un facteur numérique près c'est $B^2 - E^2$. On a donc, dans une transformation de Lorentz:

$$B'^2 - E'^2 = B^2 - E^2$$

Etant donné un champ électromagnétique $(\vec{B}, \vec{E})$ dans un certain système de référence. Peut-on trouver un système de référence dans lequel le champ sera magnétique pur? On voit que cela est possible à condition que $B^2 - E^2$ soit positif, car alors on pourra écrire:

$$B^2 - E^2 = B'^2 \qquad (\vec{E}' = 0)$$

Inversement, si $B^2 - E^2$ est négatif, on pourra trouver un système dans lequel le champ sera électrique pur, avec:

$$E^2 - B^2 = E'^2 \qquad (\vec{B}' = 0)$$

On dira qu'un champ est *du genre magnétique* ou *du genre électrique* suivant que $B^2 - E^2$ est positif ou négatif. Enfin, si $B^2 = E^2$, cette propriété restera inchangée dans une transformation de Lorentz.

Définissons maintenant un nouveau tenseur par la relation:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$$

$\tilde{F}_{\mu\nu}$ est par définition le *dual* de $F_{\mu\nu}$. Quant à la quantité $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$, sa définition est la suivante: $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ est différent de zéro seulement si les 4 indices sont tous différents. $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = +1$ si la séquence $(\mu, \nu, \rho, \lambda)$ est une permutation paire de (1,2,3,4), et $= -1$ si la séquence $(\mu, \nu, \rho, \lambda)$ est une permutation impaire de (1,2,3,4).

On peut facilement établir les expressions des composantes duales:

$$\tilde{F}_{12} = \frac{1}{2}(\epsilon_{1234}F_{34} + \epsilon_{1243}F_{43}) = -iE_z$$

et de même

$$\tilde{F}_{23} = -iE_x$$

et

$$\tilde{F}_{31} = -iE_y$$

$$\tilde{F}_{14} = \frac{1}{2}(\epsilon_{1423}F_{23} + \epsilon_{1432}F_{32}) = B_x$$

et de même

$$\tilde{F}_{24} = B_y$$

Dans l'opération P:	$\vec{E}$	$\rightarrow$	$-\vec{E}$	et	$\vec{B}$	$\rightarrow$	$\vec{B}$
Dans l'opération T:	$\vec{E}$	$\rightarrow$	$\vec{E}$	et	$\vec{B}$	$\rightarrow$	$-\vec{B}$

et

$$\tilde{F}_{34} = B_z$$

D'où l'expression du tenseur dual:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & B_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & B_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{pmatrix}$$

Etudions le comportement de la quantité $\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ dans une transformation de Lorentz:

$$\tilde{F}'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a_{\rho\alpha}a_{\lambda\beta}F_{\alpha\beta}a_{\mu\gamma}a_{\nu\delta}F_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a_{\mu\gamma}a_{\nu\delta}a_{\rho\alpha}a_{\lambda\beta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$$

Introduisons le déterminant :

$$det(a) = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a_{\mu\gamma}a_{\nu\delta}a_{\rho\alpha}a_{\lambda\beta}\epsilon_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

On en déduit:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a_{\mu\gamma}a_{\nu\delta}a_{\rho\alpha}a_{\lambda\beta} = det(a)\epsilon_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

d'où finalement:

$$\tilde{F}'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = det(a)\epsilon_{\gamma\delta\alpha\beta}\tilde{F}_{\gamma\delta}F_{\alpha\beta} = det(a)\tilde{F}_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

La quantité $\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est donc un *pseudo-invariant.* Elle conserve sa valeur dans une transformation de Lorentz avec $det(a) = +1$, et elle change de signe dans une transformation de Lorentz avec $det(a) = -1$. A un facteur numérique près c'est $\vec{E}\cdot\vec{B}$. On comprend aisément la raison du terme $det(a)$. Dans les transformations parité et renversement du temps les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se comportent de façon différente.