Chapitre 3 - Invariance de jauge

Depuis plusieurs années on parle beaucoup en physique des particules des *théories de jauge*. Les interactions faibles et électromagnétiques sont décrites conjointement par une théorie de jauge élaborée par Glashow, Weinberg et Salam. Les interactions fortes semblent aussi correctement décrites par une théorie de jauge. C'est dans le cadre de ces théories de jauge que l'on tente d'unifier les diverses interactions fondamentales de la nature. Il convient donc, même dans un cours élémentaire sur la physique des particules, de parler des théories de jauge. Nous allons étudier l'*invariance de jauge* à partir de l'équation de Schrödinger, faute de pouvoir utiliser une équation d'onde relativiste (Klein-Gordon ou Dirac). Cette limitation ne présente pas d'inconvénient majeur.

1 Invariance de jauge globale

: Considérons l'équation de Schrödinger

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

avec

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t)$$

et $\psi = \psi(\vec{r},t)$ Cette équation est manifestement invariante dans la transformation qui fait passer de ψ à ψ' avec

$$\psi' = \exp(ig\alpha)\psi$$

où g est une constante de couplage (nombre réel) et α un paramètre réel indépendant des coordonnées d'espace et du temps. En effet:

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

devient

$$H\exp(-ig\alpha)\psi' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp(-ig\alpha)\psi'\right]$$

et comme α ne dépend ni de x, y, z ni de t:

$$\exp(-ig\alpha)H\psi' = \exp(-ig\alpha)i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

soit

$$H\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

La forme de l'équation est restée la même lorsque l'on a fait le changement de ψ en ψ'.

2 Invariance de jauge locale

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger pour une particule libre et supposons que α est une fonction des coordonnées x, y, z, et du temps, soit $\alpha(\vec{r}, t)$. Peut-on rendre l'équation de Schrödinger invariante dans la transformation $\psi \rightarrow \psi' = \exp(ig\alpha)\psi$? Calculons les dérivées:

$$\vec{\nabla}\psi = \exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla}\psi') - ig\exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla}\alpha)\psi'$$

$$\nabla^2\psi = \exp(-ig\alpha)(\nabla^2\psi') - ig\exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla}\alpha)(\vec{\nabla}\psi')$$

$$-ig\exp(-ig\alpha)(\nabla^2\alpha)\psi' + (ig)^2\exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla}\alpha)^2\psi'\frac{\partial\psi}{\partial t} =$$

$$\exp(-ig\alpha)\frac{\partial\psi'}{\partial t} - ig\exp(-ig\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial t}\psi'$$

On constate la présence de termes "génants" et on ne pourra pas rendre l'équation de Schrödinger invariante. Sauf si l'on trouve un moyen de compenser ces termes "génants"! Ceci peut-être fait en remplaçant les dérivées ordinaires par des *dérivées covariantes*:

$\vec{\nabla}$	devient	$\vec{\nabla} - ig\vec{A}$
$(1/i)(\partial/\partial t)$	devient	$(1/i)(\partial/\partial t - ig(iV)$
ou encore		
$\partial/\partial t$	devient	$\partial/\partial t + igV$

où $\vec{A}$ et V sont des fonctions de x, y, z et de t, soit $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ et $V = V(\vec{r}, t)$. On a alors:

$$(\vec{\nabla} - ig\vec{A})\psi = \exp(-ig\alpha)[\vec{\nabla} - ig(\vec{\nabla}\alpha) - ig\vec{A}]\psi'$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + igV)\psi = \exp(-ig\alpha)\left[\frac{\partial}{\partial t} - ig\frac{\partial\alpha}{\partial t} + igV\right]\psi'$$

On peut s'arranger pour que les expressions $(\vec{\nabla} - ig\vec{A})\psi$ et $(\partial/\partial t + igV)\psi$ se transforment comme ψ. Il suffit de soumettre les quantités $\vec{A}$ et V à des transformations convenables: de la même façon que

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(ig\alpha)\psi(\vec{\nabla} - ig\vec{A}) \rightarrow (\vec{\nabla} - ig\vec{A}')\psi' =$$

$$\exp(ig\alpha)(\vec{\nabla} - ig\vec{A})\psi\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV\right)\psi \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + igV'\right) = \exp(ig\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV\right)\psi$$

Ceci nous montre comment se transforment $\vec{A}$ et V dans une transformation de jauge locale:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \qquad \text{et} \qquad iV' = iV + \frac{1}{i}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

soit pour le quadrivecteur $A_\mu(\vec{A}, iV)$:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha$$

Nous pouvons maintenant démontrer que l'équation de Schrödinger suivante

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} - ig\vec{A})^2\psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV\right)\psi$$

est invariante de jauge. En effet:

$$(\vec{\nabla} - ig\vec{A})\psi = \exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla} - ig\vec{A}')\psi'$$

On utilise l'identité (que l'on peut démontrer facilement):

$$(\vec{\nabla} - ig\vec{A})\exp(-ig\alpha) = \exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla} - ig\vec{A}')$$

ce qui conduit à:

$$(\vec{\nabla} - ig\vec{A})^2\psi = \exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla} - ig\vec{A}')^2\psi'$$

L'équation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} - ig\vec{A})^2\psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV\right)\psi$$

devient:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\exp(-ig\alpha)(\vec{\nabla} - ig\vec{A}')^2\psi' = i\hbar\exp(-ig\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV'\right)\psi'$$

soit en simplifiant:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} - ig\vec{A}')^2\psi' = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + igV'\right)\psi'$$

L'équation de Schrödinger ainsi modifiée conserve sa forme dans la transformation

$$\psi \to \psi' = \exp(ig\alpha)\psi$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha$$

$$V \to V' = V - \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

Mais ce n'est plus l'équation d'une particule libre, la particule est maintenant en interaction avec un potentiel quadrivecteur $A_\mu(\vec{A}, iV)$. En demandant l'invariance de jauge nous avons fait apparaître une interaction. Il est facile de montrer que cette interaction n'est pas autre chose que l'interaction électromagnétique. Notons d'abord que le *potentiel* A_μ dépend de la "jauge" choisie. À partir de A_μ on peut cependant construire une quantité *invariante de jauge*:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

En effet, avec $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha$ on trouve:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\alpha) = F_\mu + (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\alpha = F_\mu$$

puisque

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\alpha = 0$$

(en effet, la fonction α satisfait aux conditions mathématiques exigées). On conclut que le champ électromagnétique est une conséquence de l'invariance de jauge locale fondée sur le groupe $U(1)$, groupe des matrices unitaires à une dimension. Toute matrice unitaire à une dimension est en effet un nombre complexe de module 1, qui peut toujours s'écrire comme $\exp(ig\alpha)$ (g et α réels).

La constante de couplage g s'identifie avec la charge électrique e, constante de couplage des interactions électromagnétiques. L'électromagnétisme de Maxwell est donc la théorie de jauge fondée sur le groupe $U(1)$. L'intérêt de la question résulte de la possibilité qui existe de construire des théories de jauge sur des groupes plus compliqués (groupes non-abéliens): ces théories sont appelées *théories de Yang-Mills*. On verra que ces théories présentent bien des avantages, ce qui conduit à essayer de décrire les diverses interactions de la nature par des théories de jauge. Actuellement on dispose d'une théorie unifiée des interactions faibles et électromagnétiques construite sur le produit de groupes $SU(2) \otimes U(1)$. Une telle théorie contient encore deux constantes de couplage, c'est pourquoi on ne peut pas parler de véritable unification. Les interactions fortes semblent bien décrites par une théorie de jauge (chromodynamique quantique) construite sur le groupe $SU(3)_C$. La description des interactions fortes, faibles et électromagnétiques se fait avec le *modèle "standard"* construit sur le produit $SU(3)_C \otimes SU(2) \otimes U(1)$, avec trois constantes de couplage. On peut alors tenter de réaliser la *grande unification* au moyen d'une théorie de jauge construite sur un groupe plus grand, mais admettant le produit $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, soit

$$G \supset SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$$

Le groupe G le plus petit qui satisfasse à cette condition est le groupe $SU(5)$. Il prévoit que le proton est instable avec une vie moyenne de l'ordre de 10^{30} années. Cette prédiction a évidemmnent suscité plusieurs expériences avec le but d'observer la désintégration du proton. Toutes les expériences ont donné des résultats négatifs et ont prouvé que la vie moyenne du proton doit être supérieure à 10^{32} ans, ce qui permet de rejeter $SU(5)$ comme groupe unificateur. Actuellement on fonde des espoirs sur d'autres groupes comme $SO(10)$ ou E_6. De nouvelles expériences doivent être tentées. Par exemple, le groupe $SO(10)$ a des conséquences expérimentales vérifiables comme une masse finie pour les neutrinos, les oscillations neutron-antineutron, l'existence de la désintégration $K^0 \to \mu e$.