Chapitre 5 - Diffusion Rutherford

Nous allons maintenant considérer le potentiel en $1/r$ entre deux particules d'un autre point de vue. Nous avons vu que ce potentiel conduit à des trajectoires de la forme suivante (coniques) en coordonnées polaires:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}(1 + e\cos\omega)$$

1 Les trajectoires hyperboliques

Pour $e < 1$ la trajectoire est une ellipse. Elle correspond à un état lié de deux particules, par exemple un électron et un proton qui forment un atome de protium (isotope léger de l'hydrogène). Pour $e > 1$ on aura un état non lié, représentant la diffusion d'une particule par une autre, et la trajectoire sera une hyperbole. Un électron sera diffusé par un proton si $K_0 > mZe^2$. Si les deux particules possèdent des charges électriques de même signe on aura toujours un état de diffusion. Ce sera le cas par exemple pour des particules α (charge $+2e$) qui bombardent un noyau (charge $+Ze$). Si l'on reprend les calculs du chapitre précédent avec un potentiel $V(r) = \kappa Ze^2/r$, on obtient pour l'équation de la trajectoire:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}(e\cos\omega - 1)$$

avec $\rho_0 = L_0^2/mZe^2$ et $e = K_0/mZe^2$ (il suffit de changer Z en $-Z$ dans les résultats précédents. Avec $e > 1$ le terme $e\cos\omega$ peut devenir égal à 1, donc ρ devient infini pour $\omega = \pm\omega_0$, avec $\omega_0 =$ arc $\cos(1/e)$. On a donc deux asymptotes pour $\Omega = \pm\omega_0$. La branche d'hyperbole correspondant à $-\omega_0 < \omega < +\omega_0$ décrit la diffusion avec répulsion de deux particules dont les charges électriques sont de même signe. L'autre branche, correspondant à $-\omega_0 + \pi < \omega < +\omega_0 + \pi$ décrit la diffusion avec attraction de deux particules dont les charges électriques sont de signes opposés. Nous supposerons que la particule initiale vient de l'infini dans la direction définie par $\omega = +\omega_0$. Elle décrit sa branche d'hyperbole et repart vers l'infini dans la direction de l'autre asymptote, définie par $\omega = -\omega_0$. On appelle *distance minimale d'approche* la distance du centre du potentiel (situé en F, l'un des foyers de l'hyperbole) au point A', sommet de la branche d'hyperbole. C'est donc la valeur de ρ pour $\omega = 0$. La distance minimale d'approche est donc $\rho_{min} = \rho_0/(e-1)$. Enfin, une notion importante est celle de *paramètre d'impact*. C'est la distance b du centre du potentiel (le foyer F) à l'asymptote correspondant à la direction initiale de la particule incidente. On a évidemment $b = c\sin\omega_0$. Comme: $c = \rho_0 e/(e^2-1) ete = 1/\cos\Omega_0$ on trouve

$$c = \rho_0\frac{\cos\omega_0}{\sin^2\Omega_0}$$

d'où finalement:

$$b = \rho_0\tan^{-1}\omega_0 = \frac{L_0^2}{mZe^2}\tan^{-1}\omega_0$$

Mais on a aussi la relation $L_0 = bp_0 = bmv_0$, où p_0 et v_0 sont les valeurs asymptotiques de l'impulsion et de la vitesse, respectivement. Expérimentalement, v_0 est la vitesse de la particule qui lui est donnée par un accélérateur ou par une désintégration. D'où l'expression finale du paramètre d'impact:

$$b = \frac{Ze^2}{mv_0^2} \tan \omega_0$$

Les particules ayant un paramètre d'impact b sont déviées d'un angle $\theta = \pi - 2\omega_0$, d'où la relation:

$$b = \frac{Ze^2}{mv_0^2} cotg \frac{\theta}{2}$$

2 Section efficace de diffusion Rutherford

Regardons dans la direction du faisceau incident sur le noyau cible. Toutes les particules dont le paramètre d'impact est compris entre b et $b + db$ seront diffusées à des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$. Pour un faisceau de densité uniforme le nombre de particules en question est proportionnel à l'aire comprise entre deux cercles de rayons b et $b + db$, qui est égale à $d\sigma = 2\pi b db$. Tout se passe comme si le noyau présentait au faisceau une surface $d\sigma$ pour la diffusion à l'angle θ. On introduit alors la notion de *section efficace différentielle* de diffusion. Faisons le changement de variable pour passer de b à θ:

$$|db| = \frac{Ze^2}{mv_0^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \frac{d\theta}{2}$$

d'où:

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} \frac{d\theta}{2}$$

$$= 2\pi \left(\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \frac{d\theta}{2}$$

Comme le problème présente la symétrie de rotation autour du faisceau, les particules diffusées à l'angle θ le sont dans un angle solide $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. On a alors:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

$$= \left(\frac{Ze^2}{4T_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

où T_0 est l'énergie cinétique des particules. Notons ici que cette expression a été dérivée dans le cadre de la mécanique non-relativiste et que nous avons fait coincider le centre de masse avec la particule cible, ce qui est une bonne approximation seulement si ce noyau est beaucoup plus lourd qu'une particule du faisceau. Cette condition est réalisée pour la diffusion des particules α (He^{++}) sur des noyaux d'or (expérience de Rutherford). Nous avons utilisé la mécanique classique pour obtenir ce résultat. Il est amusant de constater que la mécanique quantique conduit au même résultat, qui d'ailleurs ne contient pas la quantité $\hbar$. Ceci est une particularité du potentiel en 1/r.

Si les particules en interaction ont un spin différent de zéro, la formule devra être modifiée. Enfin, si les particules en interaction sont identiques, le *principe d'indiscernabilité*, propre à la mécanique quantique, introduira des termes supplémentaires. Compte tenu de la relation $\alpha = e^2/\hbar c$, on peut écrire:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \lambda_C^2 \left(\frac{mc^2}{4T_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

où λ est la longueur d'onde Compton de la particule incidente. Analysons cette expression. L'amplitude de transition implique un échange de photon virtuel entre les deux courants associés aux particules en interaction, et la constante de couplage e (charge électrique) intervient deux fois, à l'émission et à l'absorption. Le facteur Z traduit le fait que la particule diffusante (noyau) est Z fois chargée. La probabilité de diffusion est proportionnelle au carré de l'amplitude, d'où le terme Z^2, ou $(\alpha Z)^2$. La longueur d'onde Compton, qui intervient au carré, donne la dimension d'une surface et fixe l'ordre de grandeur de la section efficace. Le facteur énergétique est sans dimension. La section efficace différentielle a la dimension d'une surface par unité d'angle solide. On pourrait utiliser le m^2/stéradian, mais cette unité est beaucoup trop grande. On définit une nouvelle unité de surface, le *barn*, par la relation:

$$\text{un barn} = 10^{-24}\text{cm}^2$$

On définit aussi des sous-multiples du barn:

$$\begin{aligned} \text{un millibarn} &= 10^{-3} \text{ barn} \\ \text{un microbarn} &= 10^{-6} \text{ barn} \\ \text{un nanobarn} &= 10^{-9} \text{ barn} \\ \text{un picobarn} &= 10^{-12} \text{ barn} \end{aligned}$$

Une section efficace différentielle s'exprimera en barn/stéradian, ou un de ses sous-multiples. Si l'on s'intéresse au nombre total de particules diffusées, quel que soit l'angle de diffusion, on introduit la *section efficace totale* de diffusion, obtenue en intégrant sur l'angle solide:

$$\sigma_d = \sum_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta$$

Une telle section efficace a la dimension d'une surface. Elle s'exprime en barn, ou un de ses sous-multiples. La grandeur des sections efficaces dépend du type d'interaction considéré. Pour les interactions fortes on a des sections efficaces qui peuvent atteindre le millibarn (exceptionnellement le barn pour la capture des neutrons par certains noyaux). Par contre, les interactions faibles ont des sections efficaces très petites, par exemple pour les réactions induites par les neutrinos où les sections efficaces sont de l'ordre du picobarn ou même inférieures. Une propriété de la section efficace différentielle Rutherford est sa forte divergence pour $\theta = 0$. En fait il est impossible de calculer la section efficace totale car l'intégrale sur θ n'a pas de sens. Cela est encore une conséquence de la portée infinie du potentiel de Coulomb (décroissance en $1/r$). La valeur $\theta = 0$ correspond en effet à un paramètre d'impact infini. Dans la pratique cela ne pose pas de problème car un potentiel qui serait en $1/r$ dans tout l'espace ne serait pas réaliste. Par exemple, le noyau qui crée son potentiel n'est pas tout seul dans l'espace, il est entouré du cortège électronique qui réduit ce potentiel à des distances atomiques et lui impose une décroissance plus rapide que $1/r$ (quelque chose comme $\exp(-r/R_0)$ avec R_0 de l'ordre du rayon de l'atome). A grande distance l'atome apparaît comme une particule neutre. Hors de l'atome le potentiel est pratiquement nul. Avec une décroissance exponentielle l'intégrale converge et l'on peut calculer la section efficace totale.

3 Appendice

Nous donnerons ici la traduction de certains termes

section efficace	cross section
section efficace différentielle	differential cross section
section efficace de diffusion	scattering cross section