Chapitre 6: SU(2), spin, isospin, polarisation

1 Introduction

Considérons un système physique susceptible de se trouver dans l'un ou l'autre de deux états. Donnons des exemples. Une particule ayant un moment angulaire intrinsèque (spin) égal à 1/2 peut se trouver dans l'un des deux états qui correspondent à $S_z = \pm 1/2$. Ici S_z est la projection du spin $\vec{S}$ sur un axe arbitrairement choisi. Un nucléon peut exister à l'état "proton" ou à l'état "neutron". On introduit la notion d'*isospin* pour caractériser cette situation. L'isospin est un moment angulaire $\vec{I}$ défini dans un espace abstrait, l'*isoespace*. Avec un isospin I = 1/2 il y a deux états possibles correspondant aux deux valeurs possibles de I_z, soit $+1/2$ (proton) et $-1/2$ (neutron). Le même formalisme mathématique sera utile pour décrire la polarisation de faisceaux de particules. Dans les cas de particules de spin 1/2 (électrons et positrons, protons et neutrons, etc...) il y a évidemment deux états de polarisation. Dans le cas du photon, dont le spin n'est pas 1/2, mais plutôt 1 (avec réserves) il y a aussi deux états de polarisation seulement à cause de la masse nulle de cette particule. On pourra utiliser pour la polarisation du photon une base à deux états, soit deux états de polarisation linéaires orthogonaux, soit deux états de polarisation circulaires de sens opposés. Considérons deux états de base de l'isospin, $|p>$ et $|n>$, représentant proton et neutron, respectivement. C'est un fait expérimental que les interactions nucléaires sont avec une très bonne approximation indépendantes de charge, ce qui signifie que ces interactions sont identiques pour les couples proton-proton, neutron-proton et neutron-neutron, pourvu que ces couples se trouvent dans le même état quantique (même fonction d'onde spatiale et même fonction de spin). Si l'on débranche les interactions électromagnétiques on met en évidence une symétrie, celle de l'isospin, qui s'exprime par le fait que la physique nucléaire est invariante dans les transformations du type:

$$\alpha|p> + \beta|n> \rightarrow \alpha'|p> + \beta'|n>$$

avec:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

où U est une matrice unitaire 2×2 et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

2 Le groupe U(2)

L'ensemble des matrices unitaires 2×2 forment un groupe:

- le produit de deux matrices unitaires 2×2 est une matrice unitaire 2×2.
- l'associativité est une propriété du produit matriciel.
- l'élément neutre existe, c'est la matrice identité 2×2.
- à toute matrice unitaire 2×2 on peut faire correspondre son inverse par la relation $U^{-1} = U^\dagger$.

C'est le groupe unitaire à deux dimensions, désigné par $U(2)$.

3 Le groupe SU(2)

Le déterminant d'une matrice unitaire est un nombre complexe de module 1. En effet:

$$det(UU^\dagger) = det(U) \times det(U^\dagger) = det(I) = 1$$

mais:

$$det(U^\dagger) = det(U)^*$$

donc $|det(U)|^2 = 1$ d'où:

$$det(U) = \exp(i\phi)$$

Si U est une matrice unitaire, on peut la soumettre à un changement de phase:

$$V = \begin{pmatrix} \exp(-i\phi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\phi/2) \end{pmatrix} U$$

on a alors

$$det(V) = \exp(-i\phi)det(U) = exp(-i\phi)\exp(i\phi) = 1$$

Considérons maintenant l'ensemble des matrices 2×2 unitaires et unimodulaires (de déterminant $+1$). Ces matrices forment un groupe, on peut le vérifier facilement. En éliminant le facteur de phase trivial $\exp(-i\phi/2)$, on restreint le groupe $U(2)$ au groupe $SU(2)$ et c'est en fait ce dernier qui est utilisé pour exprimer l'invariance de charge des forces nucléaires. Le groupe de l'isospin est donc réalisé par $SU(2)$.

4 Matrices de base de SU(2)

Toute matrice 2×2 peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de quatre matrices de base. La base la plus couramment utilisée en physique est formée des matrices de Pauli:

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et de la matrice unité. Les matrices de Pauli ont les propriétés suivantes:

$$\tau_i\tau_j = \delta_{ij}\ I + i\epsilon_{ijk}\tau_k$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et ϵ_{ijk} le symbole de Levi-Civita, déjà rencontrés. Nous définirons l'isospin ($T = 1/2$) par la relation $\vec{T} = (1/2)\vec{\tau}$.

Comme $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3$ il en résulte que:

$$(\vec{T})^2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = T(T+1)$$

avec $T = \frac{1}{2}$.

La forme la plus générale d'une matrice 2×2 est:

$$M = a_x\tau_x + a_y\tau_y + a_z\tau_z + bI = \vec{a} \cdot \vec{\tau} + b\ I$$

On peut calculer facilement les coefficients $\vec{a}$ et b, tenant compte du fait que les matrices de Pauli ont une trace nulle:

$$tr(M) = b\ tr(I) = 2b$$

d'où

$$b = \frac{1}{2}tr(M)$$

On a

$$M\tau_x = a_x I - ia_y\tau_z + ia_z\tau_y + b\tau_x$$

d'où

$$tr(M\tau_x) = a_x Tr(I) = 2a_x$$

d'où

$$a_x = \frac{1}{2}Tr(M\tau_x)$$

ce qui s'étend aux autres composantes, donc finalement:

$$\vec{a} = \frac{1}{2}Tr(M\vec{\tau})$$

$$b = \frac{1}{2}Tr(M)$$

Dans quelles conditions la matrice M sera-t-elle hermitique? Remarquons que les matrices de Pauli sont hermitiques, donc:

$$M^\dagger = a_x^*\tau_x + a_y^*\tau_y + a_z^*\tau_z + b^*I$$

La matrice M sera donc hermitique si $\vec{a}$ et b sont réels:

$$H(\text{matrice hermitique}) = \vec{a}\cdot\vec{\tau} + bI$$

($\vec{a}$ et b réels).

Finalement on peut démontrer que $\exp(iH)$ est unitaire si H est hermitique:

$$U^\dagger U = \exp(-iH)\exp(iH) = I$$

et aussi $UU^\dagger = I$. Démontrons aussi que $det(U) = \exp[iTr(H)]$. Il suffit de faire la démonstration pour une matrice H/n infinitésimale ($n \to \infty$) puisque:

$$det(U) = det(U_n)^n$$

avec $U = (U_n)^n$ et $U_n = \exp(iH/n)$. Soit donc une matrice U_n de la forme $U_n = \exp(\epsilon) = 1 + \epsilon + O(\epsilon^2)$. On trouve:

$$det(U_n) = \begin{pmatrix} 1+\epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \cdots\cdots & \epsilon_{1N} \\ \epsilon_{21} & 1+\epsilon_{22} & \epsilon_{23} & \cdots\cdots & \epsilon_{2N} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \epsilon_{N1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 1+\epsilon_{NN} \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + ... + \epsilon_{NN}) + O(\epsilon^2)$$

$$= 1 + Tr(\epsilon) = \exp[Tr(\epsilon)]$$

des termes du second ordre près.

On a donc démontré la propriété $det(U) = \exp[Tr(H)]$. En particulier, si $Tr(H) = 0$, on obtient $det(U) = 1$. Ce sera le cas si $b = 0$, ou encore $H = \vec{a} \cdot \vec{\tau}$. Les matrices 2×2 unitaires et unimodulaires (de déterminant égal à 1) forment un groupe, désigné par $SU(2)$, le *groupe unitaire unimodulaire* à 2 dimensions. La forme générale d'une matrice de $SU(2)$ est donc $\exp(i\vec{a} \cdot \vec{\tau})$, et elle dépend de 3 paramètres a_x, a_y et a_z. On peut aussi introduire un vecteur unitaire $\vec{n}$ et écrire pour toute matrice de $SU(2)$:

$$M = \exp(i\vec{T} \cdot \vec{n}\theta) = \exp\left(i\vec{\tau} \cdot \vec{n}\frac{\theta}{2}\right)$$

Les trois paramètres sont les deux angles polaires qui définissent la direction de $\vec{n}$, et l'angle θ. On peut alors deviner qu'il existe une relation entre le groupe $SU(2)$ et le groupe des rotations dans R_3, soit $SO(3)$. En fait ces deux groupes sont isomorphes.

On peut écrire une matrice de $SU(2)$ sous forme *trigonométrique*. Pour cela nous devrons utiliser la relation

$$(\vec{\tau} \cdot \vec{a})(\vec{\tau} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i\vec{\tau} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

qui se démontre facilement. Il suffit de développer les produits scalaires et d'utiliser les propriétés des matrices τ_i. On a alors:

$$\exp\left(i\vec{\tau} \cdot \vec{n}\frac{\theta}{2}\right) = 1 + i(\vec{\tau} \cdot \vec{n})\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - i(\vec{\tau}.\vec{n})\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 - ....$$

ce qui donne:

$$\exp\left(i\vec{\tau} \cdot \vec{n}\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i(\vec{\tau} \cdot \vec{n})\sin\frac{\theta}{2}$$

On se rappelle que les générateurs du groupe des rotations peuvent se mettre sous la forme $\exp(i\vec{J} \cdot \vec{n}\theta)$, donc les matrices de $SU(2)$ constituent une représentation du groupe des rotations, la représentation d'ordre $1/2$. On écrira

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{n}\frac{\theta}{2})$$

Une particularité de cette représentation (due au fait que l'ordre n'est pas entier) se traduit par les relations:

$$R_{\vec{n}}(2\pi) = -1$$

et

$$R_{\vec{n}}(4\pi) = +1$$

Comme une rotation de 2π ne change pas le système physique, on voit qu'à toute rotation géométrique correspondent en fait deux matrices de $SU(2)$, différentes par le signe. Il faut se rappeler cette ambiguité, qui n'est pas génante en pratique.

5 Les spineurs

Sur quelles entités mathématiques opérent les matrices de $SU(2)$? Ce sont des entités à deux composantes, qui sont en quelque sorte intermédiaires entre les scalaires (une composante) associés au spin 0, et les vecteurs (trois composantes) associés au spin 1. Ces entités à deux composantes sont les *spineurs.* Désignons une telle entité par

$$\phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres complexes satisfaisant à la relation de normation $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On peut développer un spineur quelconque sur la base orthonormée formée par les deux spineurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que $\phi = au_1 + bu_2$. Les deux spineurs de base u_1 et u_2 sont des états propres de τ_z avec les valeurs propres +1 et -1 respectivement:

$$\tau_z u_1 = +1 \qquad \tau_z u_2 = -1$$

On peut définir des opérateurs *de transfert* analogues des opérateurs J_+ et J_- de la théorie des moments angulaires:

$$\tau_+ = \tau_x + i\tau_y \qquad \tau_- = \tau_x - i\tau_y$$

Ces opérateurs servent à augmenter ou à diminuer d'une unité la valeur propre de τ_z, sauf si l'on atteint l'une des valeurs limites, auquel cas le résultat de l'opération donne un spineur nul:

$$\tau_+ u_1 = 0 \qquad \tau_+ u_2 = u_1 \qquad \tau_- u_1 = u_2 \qquad \tau_- u_2 = 0$$

Les états u_1 et u_2 peuvent représenter différentes choses. Par exemple les deux états de spin d'une particule de spin 1/2. On préfère alors utiliser le symbole $\vec{\sigma}$ pour les matrices de Pauli. Les deux états possibles pour le spin sont les deux états propres de $S_z = (\hbar/2)\sigma_z$ et les opérateurs σ_+ et σ_- effectuent des transitions entre ces deux états. L'opérateur σ_x a la propriété de renverser le spin

$$\sigma_x u_1 = u_2 \qquad \sigma_x u_2 = u_1$$

d'où le nom "opérateur de *spin flip*".

Dans le formalisme de l'isospin les états u_1 et u_2 sont associés au proton et au neutron, respectivement. Ce sont les états propres de τ_z. Les opérateurs τ_+ et τ_- effectuent des transitions entre neutron et proton, ils apparaîtront donc dans les éléments de matrices des transitions β. L'opérateur τ_x change neutron en proton et vice-versa.

6 Fonctions d'onde de spin et isospin

En théorie de Schrödinger la fonction d'onde d'un électron soumis à un potentiel central (présentant l'invariance par rotation autour de l'origine) s'exprime par:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$$

faisant intervenir trois nombres quantiques n, l et m. La théorie de Schrödinger donne une bonne explication des spectres atomiques observés avec une spectromètre de mauvaise résolution. Avec un meilleur appareil on peut distinguer une *structure fine*: certaines raies spectrales sont en fait des doublets, formés de deux raies très voisines. La théorie de Schrödinger ne contient pas assez de variables pour décrire toute la réalité physique. Le *spin* de l'électron a été introduit pour pallier cette insuffisance de la théorie de Schrödinger. C'est une variable *interne* pour la particule. Elle fait appel à un nouvel espace à deux dimensions, l'espace du spin. La fonction d'onde de l'électron sera donc définie dans un espace plus grand, obtenu en faisant le produit tensoriel de l'espace à 3 dimensions habituel par l'espace du spin. D'où la fonction d'onde:

$$\psi(r,\theta,\phi,\sigma) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\theta,\phi)\Xi_s^\sigma$$

avec $s = \frac{1}{2}$ et $\sigma = \pm\frac{1}{2}$. La fonction de spin est le spineur Ξ. Le nombre quantique m prend les valeurs $-l$, $-l+1$, $-l+2$, ..., $l-2$, $l-1$, l. L'invariance par rotation du potentiel a pour conséquence la dégénérescence dite *magnétique* qui fait que les énergies des niveaux quantifiés ne dépendent pas de m. Pour un niveau correspondant à la valeur l la dégénérescence est $2l+1$. On peut lever cette dégénérescence en brisant l'invariance par rotation. Cela peut se faire en introduisant un champ électrique (effet Stark) ou un champ magnétique (effet Zeeman). En plus de cette dégénérescence par rapport à m le spin introduit une dégénérescence supplémentaire, en $2s+1=2$. Au spin de l'électron est associé un moment magnétique. La dégénérescence de spin pourra aussi être levée par la présence d'un champ magnétique.

7 Le couplage $\vec{L}\cdot\vec{S}$

Dans la plupart des systèmes physiques (par exemple atomes, noyaux) il faudra tenir compte de deux sortes de moments angulaires: le *moment angulaire orbital*, désigné par $\vec{L}$, lié à l'orbite décrite par la particule (par exemple électron dans un atome); et le *moment angulaire intrinsèque (ou spin)*, désigné par $\vec{S}$. Historiquement le spin a été introduit comme représentant une rotation de l'électron sur lui-même. Cette image classique est inadéquate et doit être rejetée. À ces deux moments angulaires sont associés des moments magnétiques qui interagissent (par l'interaction électromagnétique), donnant naissance dans l'hamiltonien du système à un terme de *couplage spin-orbite*, de la forme $V_{S.O.}(r)\vec{L}\cdot\vec{S}$, où $V_{S.O.}$ est calculable dans le cadre de la mécanique quantique relativiste de Dirac. Ainsi l'hamiltonien d'un électron plongé dans le champ électromagnétique de l'atome s'écrira:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) + V_{S.O.}(r)\vec{L}\cdot\vec{S}$$

où l'on reconnait, successivement, l'énergie cinétique, le potentiel électrique créé par le noyau et les autres électrons, et enfin l'interaction spin-orbite. On peut montrer que H ne commute plus avec $\vec{L}$ (à cause du terme spin-orbite)

$$[\vec{L},\vec{L}\cdot\vec{S}] = i\hbar(\vec{S}\times\vec{L})$$

H ne commute pas avec $\vec{S}$ non plus

$$[\vec{S},\vec{L}\cdot\vec{S}] = i\hbar(\vec{L}\times\vec{S})$$

mais comme $\vec{L}$ et $\vec{S}$ commutent (ce sont des opérateurs qui agissent dans des sous-espaces différents) on voit que H commute avec leur somme

$$[H, \vec{J}] = 0 \qquad \text{avec} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Ni $\vec{L}$ ni $\vec{S}$ ne sont des constantes du mouvement, mais c'est le cas pour $\vec{J}$. Evaluons maintenant l'énergie supplémentaire apportée par le couplage spin-orbite. Remarquons d'abord que $\vec{L}\cdot\vec{S}$ commute avec L^2 et S^2 (puisque $\vec{L}$ commute avec L^2, etc...), donc aussi avec $J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S}$. Il est clair que L^2 et S^2 commutent avec $J_z = L_z + S_z$. Donc H, L^2, S^2, J^2 et J_z forment un ensemble d'observables qui commutent. C'est cet ensemble qui s'impose en présence du couplage spin-orbite. Sans couplage spin-orbite on pourrait aussi utiliser H, L^2, L_z, S^2 et S_z. Les états propres communs à L^2, S^2, J^2 et J_z s'obtiennent à partir des états propres communs à L^2, L_z, S^2 et S_z au moyen d'une transformation unitaire dont les coefficients sont les *coefficients de Clebsch-Gordan*:

$$\Psi_{lsjm_j} = \frac{u_{nl}(r)}{r} \sum_{m,\sigma} < lms\sigma | jm_j > Y_l^m \Xi_s^\sigma$$

Mais nous n'aurons pas besoin de faire appel à cette expression détaillée de la fonction d'onde. Il nous suffit de savoir qu'elle est fonction propre de L^2, S^2, J^2 et J_z avec les valeurs propres $l(l+1)\hbar^2$, $s(s+1)\hbar^2$ (avec $s = 1/2$), $j(j+1)\hbar^2$ et m_j respectivement. Tenant compte de la relation $2\vec{L}\cdot\vec{S} = J^2 - L^2 - S^2$ on peut calculer la valeur moyenne de l'interaction spin-orbite:

$$< \Psi_{lsjm_j} | \vec{L}.\vec{S} | Psi_{lsjm_j} >= \frac{1}{2}\hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \qquad \left(s = \frac{1}{2}\right)$$

La théorie des moments angulaires nous dit que j ne peut prendre que deux valeurs, soit $j = l \pm 1/2$. On aura donc pour l'énergie de couplage spin-orbite les deux valeurs:

Pour $j = l + 1/2$	$E_{S.O.} = (1/2)\ l\ V_{S.O.}$
Pour $j = l - 1/2$	$E_{S.O.} = -(1/2)\ (l+1)\ V_{S.O.}$

En l'absence de couplage spin-orbite on a une énergie E_0 associée à une dégénerescence $(2s+1)(2l+1) = 2(2l+1)$. Avec le couplage spin-orbite le niveau d'énergie E_0 se scinde en deux composantes

On a toujours le même nombre d'états, car $2(2l+1) = (2l+2) + (2l)$. Il y a eu levée partielle de la dégénerescence, car on a brisé en partie la symétrie de l'hamiltomien. Il reste encore la symétrie par rotation dans l'espace produit (orbital $\times$ spin), et liée à la conservation du moment angulaire total. La position relative des niveaux avec $j = l + 1/2$ et $j = l - 1/2$ dépend du signe de $V_{S.O.}$. En physique atomique, $V_{S.O.}$ est positif et le niveau avec $j = l + 1/2$ est celui dont l'énergie est la plus élevée. On a la situation inverse en physique nucléaire.

Moment angulaire total	Énergie	Dégénerescence
$l + 1/2$	$E_0 + (1/2)\hbar^2\ l\ V_{S.O.}$	$2(l+1/2) + 1 = 2l + 2$
$l - 1/2$	$E_0 - (1/2)\hbar^2\ (l+1)\ V_{S.O.}$	$2(l-1/2) + 1 = 2l$

8 Le triplet d'isospin des pions

Considérons les trois matrices

$$\Sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie qu'elles satisfont aux relations de commutation:

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_k$$

et qu'elles ont la propriété suivante

$$\Sigma_i^3 = \Sigma_i$$

Ces matrices constituent une représentation d'ordre 1 du groupe $SU(2)$, puisqu'elles satisfont aux relations de commutation de ce groupe. En définissant le spin par $\vec{S} = \hbar\vec{\Sigma}$ on montre facilement que

$$S^2 = \hbar^2 \times 2 = \hbar^2 s(s+1) \qquad \text{avec} \qquad s = 1$$

Ces matrices pourront être utilisées pour la description des particules de spin 1 (par exemple le deuton). Dans le cas de l'isospin on introduira des matrices T_x, T_y et T_z qui seront utilisées pour la description des particules d'isospin 1 dont un exemple est le pion dans ses trois états de charge, π^+, π^0 et π^-. Les fonctions d'isospin de ces trois particules s'écriront:

$$|\pi^+> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\pi^0> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\pi^-> = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce sont les états propres de T_z avec les valeurs propres $+1$, 0 et -1, respectivement. On peut aussi construire des opérateurs d'échelle, soit:

$$T_+ = T_x + iT_y = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_- = T_x - iT_y = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui ont les propriétés suivantes:

$$\begin{array}{lll} T_+|\pi^+> = 0 & T_+|\pi^0> = |\pi^+> & T_+|\pi^-> = |\pi^0> \\ T_-|\pi^+> = |\pi^0> & T_-|\pi^0> = |\pi^-> & T_-|\pi^-> = 0 \end{array}$$

9 Indépendance de charge des forces nucléaires

Considérons le système pion (π^+, π^0, π^-)-nucléon $(p,\, n)$. On peut en tout former six états

$$\pi^+ p \quad \pi^+ n \quad \pi^0 n \quad \pi^- n \quad \pi^0 p \quad \pi^- p$$

L'indépendance de charge des forces nucléaires s'exprime de façon mathématique en disant que l'hamiltonien des interactions fortes commute avec l'isospin total, soit ici la somme des isospins du pion et du nucléon

$$[H, \vec{T}] = 0 \qquad \text{avec} \quad \vec{T} = \vec{T}_\pi + \vec{T}_N$$

On peut aussi dire que l'hamiltonien est invariant dans toutes les rotations de l'isoespace. Ceci nous impose donc de travailler avec les états propres de l'isospin *total*, qui sont des combinaisons linéaires des états pion-nucléon considérés plus haut. La construction de ces états de l'isospin total peut se faire par l'utilisation des coefficients de Clebsch-Gordan, mais on peut aussi faire appel aux propriétés des opérateurs de moment angulaire. La composition de $T_\pi = 1$ avec $T_N = 1/2$ donne deux solutions, $T = 3/2$ et $T = 1/2$, soit les états suivants

$$\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle \quad |\frac{3}{2}\frac{1}{2}> \quad |\frac{3}{2}-\frac{1}{2}> \quad |\frac{3}{2}-\frac{3}{2}> \quad |\frac{1}{2}\frac{1}{2}> \quad |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$

Ce sont des états propres des opérateurs

$$T^2 = (\vec{T}_\pi + \vec{T}_N)^2 = T_\pi^2 + T_N^2 + T_{\pi+}T_{N-} + T_{\pi-}T_{N+} + 2T_{\pi z}T_{Nz}$$

et

$$T_z = T_{\pi z} > +T_{Nz}$$

Faisons agir les opérateurs T^2 et T_z sur l'état $|\pi^+ p>$:

$$T^2|\pi^+ p >= \left[1(1+1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) + 0 + 0 + 2(+1)(+\frac{1}{2}\right]|\pi^+ p >= \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)|\pi^+ p >$$

$$T_z|\pi^+ p >= (+1 + \frac{1}{2})|\pi^+ p >$$

on voit que $|\pi^+ p>$ est état propre de T^2 et T_z avec les valeurs propres qui permettent de l'identifier (à une phase près) à $|3/2\,3/2>$. Cette phase peut faire l'objet d'une convention et nous la choisirons égale à zéro. Donc

$$\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = |\pi^+ p >$$

Nous allons maintenant appliquer aux deux membres de cette égalité l'opérateur $T_- = T_{\pi-} + T_{N-}$ en se rappelant la relation

$$T_-|TM >= \sqrt{T(T+1) - M(M-1)}\;|TM-1>$$

ce qui donne pour $T = T_z = 3/2$:

$$T_-|\frac{3}{2}\frac{3}{2} >= \sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2} >= \sqrt{2}|\pi^0 p > +|\pi^+ n >$$

Continuons à appliquer l'opérateur T_-

$$2\sqrt{3}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2} >= 2|\pi^- p > +2\sqrt{2}|\pi^0 n >$$

$$6|\frac{3}{2}-\frac{3}{2} >= 6|\pi^- n >$$

d'où le résultat pour $T = 3/2$

$$|\frac{3}{2}\frac{3}{2} >= |\pi^+ p >$$

$$|\frac{3}{2}\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 p>+\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^+ n>$$

$$|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^- p>+\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0 n>$$

$$|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}>=|\pi^- n>$$

Les états propres de $T=1/2$ sont formés à partir des états avec $T_z=\pm 1/2$ et ils sont orthogonaux aux états avec $T=3/2$. En choisissant arbitrairement une phase on trouve:

$$|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 p>-\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+ n>$$

$$|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^- p>-\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0 n>$$

On peut facilement inverser ces équations et exprimer les états pion-nucléon en fonction des états de l'isospin total.

$$|\pi^+ p>=|\frac{3}{2}\frac{3}{2}>$$

$$|\pi^+ n>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$$

$$|\pi^0 p>=\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$$

$$|\pi^0 n>=\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$

$$|\pi^- p>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$

$$|\pi^- n>=|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}>$$

Voyons maintenant comment la symétrie de l'isospin permet de simplifier le problème de l'interaction pion-nucléon. Théoriquement on devrait considérer toutes les réactions suivantes

$\pi^+ p \to \pi^+ p$	diffusion élastique
$\pi^0 p \to \pi^0 p$	diffusion élastique
$\pi^0 p \to \pi^+ n$	échange de charge
$\pi^0 n \to \pi^0 n$	diffusion élastique
$\pi^0 n \to \pi^- p$	échange de charge
$\pi^- p \to \pi^- p$	diffusion élastique
$\pi^- n \to \pi^- n$	diffusion élastique

L'interaction qui produit ces transitions est invariante dans les rotations de l'isoespace, elle est donc associée à un opérateur A qui commute avec $\vec{T}$, l'isospin total. Il résulte de la théorie des moments angulaires (voir appendice A) que les éléments de matrice de $\vec{T}$ sur la base de l'isospin total sont diagonaux:

$$< T'T'_z|A|TT_z >= A(T)\Delta_{TT'}\Delta_{T_zT'_z}$$

et indépendants de T_z (mais dépendent en général de T). Les éléments de matrices pour l'interaction pion-nucléon se calculent facilement

$$< \pi^+p|A|\pi^+p >=< \frac{3}{2}\frac{3}{2}|A|\frac{3}{2}\frac{3}{2} >= A(\frac{3}{2})$$

$$< \pi^0p|A|\pi^+n >= \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{3}{2}\frac{1}{2}|A|\frac{3}{2}\frac{1}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}\frac{1}{2}|A|\frac{1}{2}\frac{1}{2} >= \frac{\sqrt{2}}{3}[A(\frac{3}{2}) - A(\frac{1}{2})]$$

$$< \pi^0p|A|\pi^0p >= \frac{2}{3} < \frac{3}{2}\frac{1}{2}|A|\frac{3}{2}\frac{1}{2} > +\frac{1}{3} < \frac{1}{2}\frac{1}{2}|A|\frac{1}{2}\frac{1}{2} >= \frac{1}{3}[A(\frac{3}{2}) + A(\frac{1}{2})]$$

$$< \pi^0n|A|\pi^0n >= \frac{2}{3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > +\frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >= \frac{1}{3}[A(\frac{3}{2}) + A(\frac{1}{2})]$$

$$< \pi^+n|A|\pi^+n >= \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\frac{3}{2}|A|\frac{3}{2}\frac{1}{2} > +\frac{2}{3} < \frac{1}{2}\frac{1}{2}|A|\frac{1}{2}\frac{1}{2} >$$

$$< \pi^0n|A|\pi^0n >= \frac{2}{3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > +\frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >= \frac{1}{3}[A(\frac{3}{2}) + A(\frac{1}{2})$$

$$< \pi^0n|A|\pi^-p >= \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >= \frac{\sqrt{2}}{3}[A(\frac{3}{2}) - A(\frac{1}{2})]$$

$$< \pi^-n|A|\pi^-n >=< \frac{3}{2} - \frac{3}{2}|A|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} >= A(\frac{3}{2})$$

$$< \pi^-p|A|\pi^-p >= \frac{1}{3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > +\frac{2}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|A|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >= \frac{1}{3}[A(\frac{3}{2}) + 2A(\frac{1}{2})]$$

$$< \pi^-n|A|\pi^-n >=< \frac{3}{2} - \frac{3}{2}|A|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} >= A(\frac{3}{2})$$

L'intérêt de l'invariance dans le groupe de l'isospin est une simplification énorme du problème. On peut exprimer toutes les sections efficaces pion-nucléon en fonction de deux amplitudes complexes seulement, $A(\frac{3}{2})$ et $A(\frac{1}{2})$. En fait, les réactions qu'il est possible d'étudier en laboratoire sont:

$$\pi^+p \to \pi^+p$$

$$\pi^-p \to \pi^0n$$

$$\pi^-p \to \pi^-p$$

puisque l'on dispose de faisceaux de pions chargés et de cibles d'hydrogène. Par contre on ne peut pas disposer de cibles de neutrons libres (instables avec une période de 1000 secondes environ), ni de faisceaux de pion neutres (vie moyenne 0.8×10^{-16} seconde). En désignant par σ_+, σ_0 et σ_- les sections efficaces totales des trois réactions indiquées plus haut, on trouve:

$$\sigma_+ = k|A(\frac{3}{2})|^2$$

$$\sigma_0 = k\frac{2}{9}|A(\frac{3}{2}) - A(\frac{1}{2})|^2$$

$$\sigma_- = k\frac{1}{9}|A(\frac{3}{2}) + 2A(\frac{1}{2})|^2$$

Le facteur k dépend des masses des particules et de l'énergie. Pour une même énergie dans le référentiel du centre de masse k est pratiquement le même pour les trois réactions (si l'énergie est assez élevée) en raison du fait que les masses des pions sont très voisines de même que les masses des nucléons. Posons:

$$a_1 = A(\frac{3}{2}) \qquad a_2 = A(\frac{3}{2}) - A(\frac{1}{2}) \qquad a_3 = A(\frac{3}{2}) + 2A(\frac{1}{2})$$

On trouve alors la relation

$$2A_2 + A_3 = 3A_1$$

On en déduit *l'inégalité triangulaire*:

$$|\sqrt{2\sigma_0} - \sqrt{\sigma_-}| \leq \sqrt{\sigma_+} \leq \sqrt{2\sigma_0} + \sqrt{\sigma_-}$$

qui peut-être testée expérimentalement. Une simplification supplémentaire se produit si l'interaction pion-nucléon est dominée par une voie d'isospin, par exemple la voie $T = 3/2$. Il suffit que l'on ait $A(3/2) >> A(1/2)$. On aura alors une prédiction simple pour les rapports des sections efficaces

$$\sigma_+ : \sigma_o : \sigma_- = 9 : 2 : 1$$

Pour des énergies inférieures à environ 300 MeV dans le référentiel du laboratoire cette prédiction est bien vérifiée par l'expérience:

$$\sigma_+ = (122 \pm 8)\text{mb}$$

$$\sigma_0 = (12.8 \pm 1)\text{mb}$$

$$\sigma_- = (25.6 \pm 1.3)\text{mb}$$

Les sections efficaces sont dans les rapports

$$(9.5 \pm 0.9) : (2.0 \pm 0.2) : 1$$

10 Autre exemple

On peut comparer les deux réactions

$pd \to \pi^0\ {}^3He$ section efficace σ_0
$pd \to \pi^+\ {}^3H$ section efficace σ_+

On a évidemment $T_z = 0$ pour le deuton, et la physique nucléaire nous apprend qu'il a aussi $T = 0$. L'état initial est donc caractérisé par un isospin total $T = T_z = 1/2$ (comme le proton). Si l'isospin est conservé, l'état final devra aussi avoir $T = T_z = 0$. Comme les noyaux ${}^3He$ et ${}^3H$ ont les mêmes nombres quantiques que proton et neutron, respectivement, on peut utiliser des calculs déjà faits pour le système pion-nucléon et écrire:

$$|\pi^+\ {}^3H>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$$

$$|\pi^0\ {}^3He>=\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$$

d'où les amplitudes

$$<\pi^+\ {}^3H|A|pd>=-\sqrt{\frac{2}{3}}A(\frac{1}{2})$$

$$<\pi^0\ {}^3He|A|pd>=\sqrt{\frac{1}{3}}A(\frac{1}{2})$$

Il en résulte que les sections efficaces totales devront être dans le rapport 2:

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_0}=2$$

Evidemment on ne s'attend pas à un accord parfait entre théorie et expérience du fait que la symétrie de l'isospin est brisée par l'interaction électromagnétique. Si l'on effectue les corrections appropriées on trouve que le rapport des sections efficaces expérimentales est compatible avec la valeur 2, à l'intérieur des marges d'erreur.

11 Autre exemple

La production des hypérons Σ au moyen des réactions

$$\pi^- p \to \Sigma^- K^+$$

$$\pi^- p \to \Sigma^0 K^0$$

$$\pi^+ p \to \Sigma^+ K^+$$

dont les sections efficaces sont désignées par σ_-, σ_0 et σ^+, respectivement. C'est un encore un cas ou il faut coupler un isospin 1 (les Σ) avec un isospin 1/2 (les kaons). En reprenant des calculs déjà faits:

$$|\pi^- p>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$

$$|\Sigma^- K^+>=\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$

$$|\Sigma^0 K^0>=\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$

$$|\pi^+ p>=|\frac{3}{2}\frac{3}{2}>$$

$$|\Sigma^+ K^+ >= |\frac{3}{2}\frac{3}{2}>$$

d'où les amplitudes

$$a_- =< \Sigma^- K^+ |A| \pi^- p >= \frac{1}{3}A(\frac{3}{2}) + \frac{2}{3}A(\frac{1}{2})$$

$$a_0 =< \Sigma^0 K^0 |A| \pi^- p >= \frac{\sqrt{2}}{3}A(\frac{3}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}A(\frac{1}{2})$$

$$a_+ =< \Sigma^+ K^+ |A| \pi^+ p >= A(\frac{3}{2})$$

Ces amplitudes satisfont à la relation

$$a_- + \sqrt{2}A_0 = A^+$$

On a donc la relation d'inégalité triangulaire

$$|\sqrt{\sigma_-} - \sqrt{\sigma_+}| \leq \sqrt{2\sigma_0} \leq \sqrt{\sigma_-} + \sqrt{\sigma_+}$$

Au voisinage du seuil d'énergie $E - S$ les sections efficaces se comportent comme

$$\Sigma = C(E - E_S)^{1/2}$$

et on peut déterminer expérimentalement les valeurs des coefficients C_-, C_0 et C_+:

$$C_- = (38 \pm 2)\mu b(MeV)^{-1/2}$$

$$C_0 = (45 \pm 4)\mu b(MeV)^{-1/2}$$

$$C_+ = (8.2 \pm 0.6)\mu b(MeV)^{-1/2}$$

On en déduit

$$\sqrt{C_-} + \sqrt{C_+} = (6.8 \pm 0.1)(\mu b)^{1/2}(MeV)^{-1/4}$$

$$\sqrt{2C_0} = (6.7 \pm 0.3)(\mu b)^{1/2}(MeV)^{-1/4}$$

L'inégalité triangulaire est vérifiée, et même presque l'égalité supérieure. Par contre on ne peut pas affirmer qu'une amplitude d'isospin domine. On aurait:

- pour $A(\frac{3}{2}) >> A(\frac{1}{2}) \quad \sigma_+ : \sigma_o : \sigma_- = 9 : 2 : 1$
- pour $A(\frac{1}{2}) >> A(\frac{3}{2}) \quad \sigma_+ : \sigma_o : \sigma_- = 0 : 2/9 : 4/9$

Aucune de ces solutions n'est réalisée. Il y a contribution des deux voies d'isospin, 3/2 et 1/2.

12 La désintégration du Λ^0

Les principaux modes de désintégration du Λ^0 sont

$$\Lambda^0 \to p\pi^- \qquad \text{(rapport d'embranchement 64.2\%)}$$

$$\Lambda^0 \to n\pi^0 \qquad \text{(rapport d'embranchement 35.8\%)}$$

Le Λ^0 constitue un singulet d'isospin, sa fonction d'onde dans l'isoespace est donc caractérisée par $T = 0$ et $T_z = 0$:

$$|\Lambda^0 >= |00>$$

Les fonctions d'onde du système pion-nucléon ont déjà été calculées:

$$|\pi^- p >= \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > +\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >$$

$$|\pi^0 n >= \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > -\sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >$$

On constate que l'isospin n'est pas conservé dans ces désintégrations. En effet, elles sont produites par l'interaction faible et cette dernière viole la conservation de l'isospin et de l'étrangeté. On rappelle qu'il existe une relation entre la charge électrique Q, la composante I_z de l'isospin, l'étrangeté S et le nombre baryonique B:

$$Q = I_z + \frac{B+S}{2}$$

On sait que Q et B sont conservés (au moins avec une très bonne précision). Par contre il y a une violation de I_z et de S, avec

$$|\Delta I_z| = \frac{1}{2} \qquad\qquad |\Delta S| = 1$$

Mais quelle est la violation de l'isospin I? Est-ce $\Delta I = 3/2$ ou $\Delta I = 1/2$, ou un mélange des deux? On peut rétablir la conservation de l'isospin en introduisant une particule fictive, le *spurion*, qui ne possède aucune charge électrique, masse, etc..., sauf un isospin et une étrangeté. Bien entendu le spurion n'existe pas, c'est seulement un artifice mathématique qui permet de travailler avec un opérateur A invariant dans les rotations de l'isoespace. On peut attribuer au spurion un isospin 3/2 ou 1/2 avec $I_z = -1/2$. On peut écrire la fonction d'onde du spurion sous la forme

$$\alpha|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > +\beta|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >$$

avec

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

D'où pour le système Λ^0-Spurion

$$|\Lambda^0 Sp >= \alpha|\frac{3}{2} - \frac{1}{2} > +\beta|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >$$

avec

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

On aura alors pour les éléments de matrice de transition

$$< \pi^- p|A|\Lambda^0 Sp >= \alpha\sqrt{\frac{1}{3}}A(\frac{3}{2}) + \beta\sqrt{\frac{2}{3}}A(\frac{1}{2})$$

$$< \pi^0 n|A|\Lambda^0 Sp >= \alpha\sqrt{\frac{2}{3}}A(\frac{3}{2}) - \beta\sqrt{\frac{1}{3}}A(\frac{1}{2})$$

On peut donc calculer le rapport d'embranchement

$$R = \frac{\Lambda^0 \to \pi^- p}{\Lambda^0 \to \pi^0 n} = \frac{|\alpha\sqrt{\frac{1}{3}}A(\frac{3}{2}) + \beta\sqrt{\frac{2}{3}}A(\frac{1}{2})|^2}{|\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}A(\frac{3}{2}) - \beta\sqrt{\frac{1}{3}}A(\frac{1}{2}|^2} = \frac{|x+\sqrt{2}|^2}{|\sqrt{2}x-1|^2}$$

avec

$$x = \frac{\alpha A(\frac{3}{2})}{\beta A(\frac{1}{2})}$$

Si $x = 0$ (violation de l'isospin $\Delta I = 1/2$) on a $R = 2$. L'expérience donne 64.2/35.8, ce qui est compatible avec $\Delta I = 1/2$. Dans le modèle des quarks, on a une transition entre un singulet $I = 0$ (le quark s) et un doublet $I = 1/2$ (les quarks $uetd$) et on doit donc avoir $\Delta I = 1/2$.