Chapitre 7. De SU(2) à SU(3)

SU(2) peut être utilisé pour décrire la physique du spin et celle de l'isospin. En particulier nous avons reconnu l'importance de la symétrie d'isospin pour la classification des hadrons et aussi pour relier entre elles les sections efficaces et les rapports d'embranchement de diverses réactions ou désintégrations. Mais nous avons vu qu'une propriété fondamentale des hadrons est leur étrangeté S (ou leur hypercharge Y = B + S, B étant le nombre baryonique). Or l'hypercharge est extérieure au groupe SU(2) de l'isospin (ce n'est pas un générateur de ce groupe). Nous allons voir maintenant qu'on peut inclure isospin et hypercharge dans un groupe plus vaste, le groupe SU(3).

1 Le groupe SU(3)

C'est le groupe des matrices unitaires unimodulaires 3×3, donc telles que

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

$$det(U) = 1$$

Toute matrice U peut s'écrire comme $U = \exp(iH)$ avec H hermitique et de trace nulle. H pourra être développée sur une base de matrices Λ_a

$$H = \sum_{a=1}^{8} \epsilon_a \lambda_a$$

avec des ϵ_a réels. On peut montrer en effet qu'une matrice unitaire $n \times n$ requiert n^2 paramètres pour sa description. Avec la condition supplémentaire $det(U) = 1$ on a besoin de $n^2 - 1$ paramètres (donc 8 pour n = 3). Le choix de la base est arbitraire. Nous utiliserons celle de Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ces matrices ont les propriétés suivantes

$$tr(\lambda_a) = 0$$

$$tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$$

et leur relation de commutation est

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

ce qui définit l'*algèbre de Lie* du groupe. Les *constantes de structure* f_{abc} ont la propriété d'être totalement antisymétriques et celles qui ne sont pas nulles ont les valeurs suivantes:

$$f_{123} = 1 \qquad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = \frac{1}{2} \qquad f_{458} = f_{678} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Les générateurs du groupe sont définis par

$$F_a = \frac{\lambda_a}{2} \qquad \text{avec} \qquad [F_a, F_b] = i f_{abc} F_c$$

Dans le groupe $SU(3)$ on peut diagonaliser simulanément deux générateurs (ce sont F_3 et F_8 avec la base choisie); on dira que $SU(3)$ est un groupe de rang 2 (noter que $SU(2)$ est un groupe de rang 1). Au sens de la mécanique quantique il y aura deux grandeurs simultanément mesurables, que nous définirons par

$$t_z = F_3 \qquad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

(composante z de l'isospin et hypercharge)

$$t_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On peut construire des opérateurs de transfert

$$t_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad u_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifiera facilement les relations de commutation

$$[T_z, T_\pm] = \pm T_\pm \qquad [T_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm \qquad [T_z, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm$$

$$[Y, T_\pm] = 0 \qquad [Y, U_\pm] = \pm U_\pm \qquad [Y, V_\pm] = V_\pm$$

$$[T_+, T_-] = 2T_z \qquad [U_+, U_-] = 2U_3 = \frac{3}{2}Y - T_z \qquad [V_+, V_-] = 2V_3 = \frac{3}{2}Y + T_3$$

$$[T_+, V_+] = [T_+, U_-] = [U_+, V_+] = 0$$

$$[T_+, V_-] = -U_- \qquad [T_+, U_+] = V_+ \qquad [U_+, V_-] = T_- \qquad [T_z, Y] = 0$$

2 Les quarks

Construisons un graphique en portant en abscisses les valeurs propres de de T_z et en ordonnées celles de l'hypercharge Y. On définit ainsi trois objets associés aux points de coordonnées $(+1/2, +1/3)$, $(-1/2, +1/3)$ et $(0, -2/3)$. En physique des particules ces trois objets sont appelés *quarks* q_1, q_2 et q_3 ou encore u, d et s.

Ces trois "particules" constituent la représentation d'ordre 3 de $SU(3)$. Cette représentation est en fait la représentation *fondamentale*, à partir de laquelle on peut construire, par multiplication, toutes les autres. Dans le groupe $SU(2)$ c'est la représentation 2 qui est la représentation fondamentale. Les appelations u, d et s ont l'origine suivante. Par analogie avec le spin, les quarks qui constituent les particules familières (proton, neutron) et qui forment un doublet d'isospin sont dénotés par u (up) et d (down). Le quark étrange est dénoté par s (strange). Les différentes espèces de quarks sont appelées *saveurs (flavours)*. Le groupe $SU(3)$ est donc construit sur trois saveurs. En fait on a été amené à introduire d'autres saveurs: c, b et t, ce qui fait passer de $SU(3)$ à $SU(6)$. Nous allons cependant nous limiter à $SU(3)$ dans ce qui suit car la situation est beaucoup plus simple. Il est facile de généraliser ensuite. L'action des opérateurs de transfert sur les quarks s'étudie aisément. Introduisons les états

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve alors:

$$\begin{array}{lll}
T_+u = 0 & T_+d = u & T_+s = 0 \\
T_-u = d & T_-d = 0 & T_-s = 0 \\
U_+u = 0 & U_+d = 0 & U_+s = d \\
U_-u = 0 & U_-d = s & U_-s = 0 \\
V_+u = 0 & V_+d = 0 & V_+s = u \\
V_-u = s & V_-d = 0 & V_-s = 0
\end{array}$$

Sur le graphique les opérateurs T_+ et T_- agissent suivant l'horizontale, les autres opérateurs agissant suivant des directions inclinées à -60^o et $+60^o$ respectivement. Dans la classification des hadrons on avait observé qu'il existait une relation entre T_z, Y et la charge électrique Q (relation de Gell-Mann et Nishijima)

$$Q = T_z + \frac{Y}{2} = T_z + \frac{B+S}{2}$$

Comme cette relation relie des quantités additives elle va se retrouver au niveau des quarks, ce qui conduit au tableau de valeurs suivantes:

	T	T_z	B	S	Y	Q
u	$1/2$	$+1/2$	$1/3$	0	$+1/3$	$+2/3$
d	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	0	$+1/3$	$-1/3$
s	0	0	$1/3$	-1	$-2/3$	$-1/3$

Les trois quarks u, d et s constituent la représentation 3 de $SU(3)$. On peut aussi définir une représentation $\overline{3}$ associée aux anti-quarks. Les trois antiquarks $\overline{u}, \overline{d}$ et $\overline{s}$ sont placés respectivement aux points de coordonnées $(-1/2,\ -1/3)$, $(+1/2,\ -1/3)$ et $(0,\ +2/3)$. Dans le tableau précédent il faudrait changer les signes de T_z, B, S, Y et Q pour obtenir les valeurs des nombres quantiques des anti-quarks.

3 Les autres représentations

A partir de ces deux représentations 3 et $\overline{3}$ on peut construire les autres représentations. Pour cela nous utiliserons la méthode graphique, qui n'est pas rigoureuse mais qui permet d'obtenir simplement le résultat. Considérons le cas du produit $3 \otimes 3$. On utilise chaque sommet du triangle associé à la représentation 3 comme centre d'un nouveau triangle. Ceci se justifie par le fait que les quantités T_z et Y sont additives. On obtient alors les six points de coordonnées $(+1,\ +2/3)$, $(0,\ +2/3)$ (point double), $(-1,\ +2/3)$, $(+1/2,\ -1/3)$ (point double), $(-1/2,\ -1/3)$ (point double) et $(0,\ -4/3)$. Le produit $3 \otimes 3$ est réductible en une représentation 6 formée des six points définis plus haut et une représentation $\overline{3}$ formée des trois points qui restent quand on a enlevé la représentation 6. On peut facilement écrire les états de $SU(3)$ de ces deux représentations. Partons du point qui est le plus à droite dans la représentation 6. Il est formé de deux quarks u (la seule façon d'avoir $T_z = 1$ et $Y = 2/3$). Appliquons lui l'opérateur T_-

$$t_T - |T = 1 T_z = 1 >= \sqrt{2}|T = 1 T_z = 0 >$$

Mais comme $T_- = T_{1-} + T_{2-}$:

$$T_- uu = du + ud$$

d'où

$$|T = 1\ T_z = 0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(du + ud)$$

En appliquant T_- une fois de plus on arrive au point qui est le plus à gauche. Il est représenté par dd. On peut ensuite appliquer l'opérateur U_- sur dd. Cela donne

$$|T = \frac{1}{2}\ T_z = -\frac{1}{2}\ Y = -\frac{1}{3} >= \frac{1}{\sqrt{2}}(sd + ds)$$

Une nouvelle application de U_- fait passer au point le plus bas, qui correspond à ss. Et ainsi de suite. Les états de la représentation 6 sont donc:

$$dd \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(du + ud) \qquad uu \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(sd + ds) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(us + su) \qquad ss$$

Les particules ainsi obtenues sont des diquarks. Il est facile de trouver les états peuplant la représentation $\overline{3}$ car ils sont orthogonaux à ceux de la représentation 6. Ce sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(sd - ds) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)$$

Il faut noter que cette représentation $\overline{3}$ contient ici des diquarks, ce qui la distingue de la représentation $\overline{3}$ des antiquarks utilisée précédemment.

Une remarque s'impose concernant les propriétés de symétrie de ces états par rapport à la permutation des deux quarks. Il est évident que la représentation 6 est symétrique alors que la représentation $\overline{3}$ est antisymétrique. En résumé

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3}$$

On peut obtenir facilement le produit $6 \otimes 3$ par la méthode graphique. On trouve:

$$6 \otimes 3 = 10 \oplus 8$$

Pour le produit 3(quarks) $\otimes$ 3(diquarks) qui peut aussi se traiter par la méthode graphique le résultat est:

$$3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$$

Trouvons d'abord l'état qui constitue la représentation 1. Il est formé d'un quark u, d'un quark d et d'un quark s. La façon la plus générale de le représenter est

$$\alpha(uds) + \beta(dsu) + \gamma(sud) + \delta(dus) + \epsilon(usd) + \phi(sdu)$$

L'action de tout opérateur de transfert sur cet état donne évidemment zéro. En faisant agir T_+ on arrive à $\alpha + \delta = \beta + \epsilon = \gamma + \phi = 0$. En faisant agir U_- on trouve $\alpha + \epsilon = \beta + \phi = \gamma + \delta = 0$. Donc l'état cherché, normé à l'unité, s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dsu + sud - dus - usd - sdu)$$

Cet état est complétement antisymétrique (sa fonction d'onde change de signe dans n'importe quelle permutation de deux quarks).

Trouvons maintenant les états de l'octet. Partons de l'état qui a $T_z = 1/2$ et Y = 1. Il faut ajouter un quark u à l'état du - ud de la représentation $\overline{3}$. On obtient ainsi le proton. Pour avoir le neutron, on applique T_-. Cela donne pour ces deux particules

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud)u \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud)d$$

A partir du proton on obtient le Σ^+ par application de U_-, et ensuite on obtient le Σ^0 et le Σ^- par application de T_-. On obtient pour le triplet des Σ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(su - us)u \qquad \frac{1}{2}.....$$

L'action de U_- sur Σ^- donne Ξ^- et il reste à appliquer T_+ pour obtenir Ξ^0. Cela donne:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(sd - ds)s \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(su - us)s$$

Evidemment il reste à trouver le Λ^0. Comme ce dernier possède la même propriété de symétrie que ses partenaires de l'octet il doit s'écrire:

$$\alpha(sd - ds)u + \beta(du - ud)s + \gamma(us - su)d$$

L'orthogonalité avec le Σ^0 donne $\alpha = \gamma$. L'orthogonalité avec l'état de la représentation 1 donne $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On a donc pour le Λ^0:

$$\frac{1}{\sqrt{12}}[(sd - ds)u + (us - su)d - 2(du - ud)]$$

On peut construire les états du décuplet en partant de l'état situé à l'extrême droite et qui est représenté par uuu ($T_z = 3/2$). On applique plusieurs fois l'opérateur T_- jusqu'à l'obtention de l'état ddd, situé à l'extrême gauche. Ensuite on utilise l'opérateur U_- plusieurs fois et on arrive à l'état sss situé le plus bas. On complète le tout en utilisant T_- de nouveau. On obtient ainsi les états:

$$ddd \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(duu + udu + uud) \qquad uuu$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd) \qquad \frac{1}{6}(uds + dsu + sud + dus + usd + sdu) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$$

$$sss$$

On reconnaît le décuplet de baryons formé des résonances Δ, Σ^*, Ξ^* et de la particule Ω^-.

$$\Delta^- \qquad \Delta^0 \qquad \Delta^+ \qquad \Delta^{++}$$

$$\Sigma^{*-} \qquad \Sigma^{*0} \qquad \Sigma^{*+}$$

$$\Xi^{*-} \qquad \Xi^{*0}$$

$$\Omega^-$$

Ici encore on a des états symétriques. Quant à la représentation 8, qui provient du produit $6 \otimes 3$ on, va la déterminer en écrivant que les états de l'octet sont orthogonaux aux états du décuplet. Le proton est composé des mêmes quarks que le Δ^+ et il est de la forme $\alpha(uud) + \beta(udu) + \gamma(duu)$. L'orthogonalité avec le Δ^+ nous donne $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et il est donc impossible de déterminer les trois coefficients qui sont liés par la condition

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

Cela se comprend facilement: la représentation 8 figure deux fois dans la décomposition du produit $3 \otimes 3 \otimes 3$, d'où une indétermination. On peut écrire

$$\beta(udu) + \gamma(duu) - (\beta + \gamma)(uud)$$

et en introduisant $\gamma - \beta = 2A, \gamma + \beta = 2B$, on trouve:

$$p = A(du - ud)u + B[(du + ud)u - 2(uud)]$$

On a ainsi séparé deux termes possédant des symétries différentes: le premier est antisymétrique dans l'échange des deux premiers quarks et le second est symétrique. Nous avons déjà considéré la partie symétrique. Les calculs se font de la même façon avec la partie symétrique, avec l'utilisation des opérateurs de transfert. Comme la représentation 8 intervient deux fois il y a une indétermination dans la façon d'écrire les états de l'octet de baryons. Nous allons maintenant regarder l'octet de baryons en tournant la tête de 60^o. Nous voyons alors un doublet formé de particules positives, p et Σ^+, puis les particules neutres, puis un doublet de particules négatives, le Σ^- et le Ξ^-. C'est donc la charge électrique qui a pris la place de l'étrangeté et on désignera par U-spin la variable qui a pris la place de l'isospin. Nous nous posons alors la question: quels sont les états propres du U-spin? Partons du neutron qui est caractérisé par $U = 1$ (il est membre d'un triplet de U-spin) et $U_z = +1$. En appliquant l'opérateur U_- on obtient l'état $|U = 1\ U_z = 0>$. Faisons les calculs avec les états antisymétriques.

$$u_-n = U_-\frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud)d = \frac{1}{\sqrt{2}}(sud - dus - usd - uds) = \sqrt{2}|U = 1\ U_z = 0>$$

d'où:

$$|U = 1\ U_z = 0> = \frac{1}{2}\Big[(su - us)d + (du - ud)s\Big]$$

Nous voyons que cet état est un mélange de Λ^0 et de Σ^0. On peut calculer les coefficients:

$$<\Lambda^0|U = 1\ U_z = 0> = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad <\Sigma^0|U = 1\ U_z = 0> = \frac{1}{2}$$

Ce qui donne:

$$|U = 1\ U_z = 0> = -\frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0 + \frac{1}{2}\Sigma^0$$

L'état $|U = 0\ U_z = 0>$ est orthogonal au précédent, donc

$$|U = 0\ U_z = 0> = \frac{1}{2}\Lambda^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma^0$$

Les états propres du U-spin ne coincident donc pas avec ceux de l'isospin, ce qui se comprend puisque les opérateurs correspondants ne commutent pas.

4 Une formule de masse

À partir de l'algèbre de $SU(3)$ on peut établir de nombreuses relations entre sections efficaces, rapports d'embranchements, etc... En ce qui concerne les masses des particules, une symétrie $SU(3)$ parfaite impose la même masse à toutes les particules d'une même représentation. Evidemment ce n'est pas ce que l'on observe et il faut en conclure que la symétrie est brisée. Il y a en fait deux sortes de brisure. La première brise la symétrie $SU(3)$ mais respecte la symétrie du sous-groupe $SU(2)$ de l'isospin. Ensuite, l'interaction électromagnétique brise la symétrie de l'isospin. Traitons seulement le premier type. Nous ferons l'hypothèse la plus simple, à savoir que la brisure est proportionnelle à U_z. Il faut donc ajouter à une valeur commune m_0 un terme de la forme AU_z, ce qui donne pour les membres du triplet de U-spin

$$<n|M|n> = m_0 + a$$

$$<\frac{1}{2}\Sigma^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0|M|\frac{1}{2}\Sigma^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda^0> = m_0$$

$$< \Xi^0|M|\Xi^0 >= m_0 - a$$

L'opérateur de masse M respecte la symétrie $SU(2)$ de l'isospin, donc ses éléments de matrice entre Σ^0 et Λ^0 sont nuls. Donc

$$\frac{1}{4} < \Sigma^0|M|\Sigma^0 > + \frac{3}{4} < \Lambda^0|M|\Lambda^0 >= m_0$$

On en déduit donc la *formule de masse*:

$$M(n) + M(\Xi^0) = \frac{M(\Sigma^0) + 3M(\Lambda^0)}{2}$$

Cette formule est bien vérifiée par l'expérience. On trouve dans les tables (masses en MeV/c^2):

$$M(n) = 939.6 \qquad M(\Xi^0) = 1314.9 \qquad M(\Sigma^0) = 1192.5 \qquad M(\Lambda^0) = 1115.6$$

On trouve alors pour les deux membres de l'égalité 2254.5 et 2269.6. La différence relative entre ces deux nombres est 0.66%. On ne peut pas demander mieux puisque cette différence est du même ordre de grandeur que la brisure électromagnétique de $SU(2)$, dont on n'a pas tenu compte.

5 La symétrie SU(4)

Nous avons vu que les nucléons (proton et neutrons) appartiennent à un doublet d'isospin $T = 1/2$. Mais les nucléons sont aussi des particules de spin 1/2, donc pouvant chacun se trouver dans l'état $\uparrow$ ou dans l'état $\downarrow$. Ces deux états de spin forment aussi un doublet. La physique de deux nucléons est alors décrite par le produit

$$SU(2)_S \otimes SU(2)_T$$

Mais on peut inclure le spin et l'isospin dans un formalisme plus général, faisant intervenir le groupe $SU(4)$ qui admet le produit $SU(2) \otimes SU(2)$ comme sous-groupe

$$SU(4)_{S,T} > SU(2)_S \otimes SU(2)_T$$

Le groupe $SU(4)$ comprend 15 générateurs infinitésimaux. Trois d'entre eux peuvent être rendus diagonaux. Ce sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le groupe $SU(4)$ est de rang 3. Il faut donc utiliser un espace à trois dimensions pour représenter les états. Ces derniers sont:

$$p\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En faisant agir sur eux les trois générateurs diagonaux on extrait les coordonnées des points figuratifs de la représentation 4 de $SU(4)$ (la représentation fondamentale):

$$p\uparrow(1,1,1) \qquad p\downarrow(1,-1,-1) \qquad n\uparrow(-1,1,-1) \qquad n\downarrow(-1,-1,1)$$

Ce sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Il y a ensuite 12 opérateurs de transfert qui effectuent tous les changements possibles de spin et d'isospin. Ils peuvent être représentés par des matrices qui s'obtiennent facilement en généralisant les résultats de $SU(3)$. Il existe dans $SU(4)$ des opérations telles que $p\uparrow \rightarrow n\downarrow$ qui n'existaient pas dans le produit des groupes $SU(2)$ du spin et de l'isospin. La symétrie $SU(4)$ peut être utilisée en physique nucléaire pour décrire les noyaux légers. C'est n'est cependant pas une symétrie exacte puisque les forces nucléaires dépendent du spin et de l'isospin.

En physique des particules, le groupe $SU(4)$ de la saveur a été utilisé au moment où on connaissait seulement quatre quarks, u, d, c et s. Par exemple, avec ces quatre quarks et les antiquarks correspondants on peut construire 16 états appartenant aux représentations 15 et 1. En plus des neufs états non-charmés (l'octet et le singulet de $SU(3)$) on a les mésons charmés:

$$D^0 = \overline{u}c \qquad \overline{D^0} = u\overline{c} \qquad D^+ = \overline{d}c \qquad D^- = d\overline{c} \qquad F^+ = \overline{s}c \qquad F^- = s\overline{c} \qquad J/\psi = c\overline{c}$$

6 Le groupe SU(6)

Les quarks ont aussi un spin 1/2. Ici encore on introduit le groupe $SU(6)$ tel que

$$U(6) \supset SU(3)_{T,Y} \otimes SU(2)_S$$

C'est un groupe de rang 5. Il y a en tout 35 générateurs infinitésimaux dont 30 sont des opérateurs de transfert. On peut ainsi relier les 6 états de la représentation fondamentale

$$u\uparrow \qquad u\downarrow \qquad d\uparrow \qquad d\downarrow \qquad s\uparrow \qquad s\downarrow$$

Les règles de multiplication sont les suivantes

$$6 \otimes \overline{6} = 35 \oplus 1 \qquad 6 \otimes 6 \otimes 6 = 70 \oplus 70 \oplus 56 \oplus 20$$

On peut reconnaître dans la représentation mésonique 35 l'octet pseudoscalaire de $SU(3)$ (8 états), l'octet pseudovectoriel de $SU(3)$ (24 états puisque 8 mésons de spin 1) et finalement le singulet d'isospin de spin 1 (3 états). La représentation baryonique 56 contient le décuplet de $SU(3)$ (40 états puisque 10 baryons de spin 3/2) et l'octet de $SU(3)$ (16 états puisque 8 baryons de spin 1/2). Avec $SU(6)$ on évite certaines indéterminations rencontrées pour $SU(3)$. On peut faire beaucoup plus de prédictions. Un des succès de $SU(6)$ est la prédiction du rapport des moments magnétiques du proton et du neutron. La valeur prédite est $-3/2$, ce qui est très proche de la valeur expérimentale.

7 Introduction de la couleur

Le modèle des quarks pose quelques problèmes.

1. Considérons l'état $uuu = \Delta^{++}$. C'est l'état fondamental (le plus bas en énergie) d'un système de trois quarks. Sa fonction d'onde est donc caractéristique d'un état S (tous les moments angulaires orbitaux sont nuls). On se rappelle que des termes avec $l \neq 0$ ajoutent de l'énergie centrifuge, ce qui cause une élévation de l'énergie totale de l'état. Or un état S a une fonction d'onde spatiale symétrique (dans l'échange de 2 particules). La fonction de spin est évidemment symétrique puisque la seule façon d'avoir un spin total $3/2$ est d'aligner les spins des trois quarks ($\uparrow\uparrow\uparrow$). Enfin, la fonction d'onde d'isospin est symétrique puisqu'il s'agit de trois quarks de même nature. On en conclut que la fonction d'onde globale du Δ^{++} est symétrique. Mais cette particule est un fermion puisque son spin est non-entier (égal à $3/2$). Le principe de Pauli exige que la fonction d'onde d'un fermion soit anti-symétrique. Il y a là une difficulté qui pourrait être résolue de deux façons. On pourrait admettre que le principe de Pauli ne s'applique pas aux quarks. La connexion habituelle entre spin et statistique serait en fait inversée. On a considérée cette voie et introduit la *para-statistique* pour décrire ce genre de comportement. Une autre possibilité consiste à admettre qu'il nous manque une composante de la fonction d'onde, correspondant à un degré de liberté supplémentaire que posséderaient les quarks. Nous verrons que c'est cette dernière solution qui a été retenue.

2. On a fait beaucoup d'efforts pour observer des quarks à l'état libre sans jamais réussir. On pourrait affirmer que c'est parce que l'on ne dispose pas des énergies suffisantes. Une autre possibilité consiste à postuler que les quarks ne sont pas isolables (ils sont toujours confinés dans des "sacs", les hadrons, avec deux possibilités seulement: les mésons et les baryons). Mais pourquoi mésons et baryons, et pas autre chose? Et qu'est-ce qui cause cette propriété de *confinement*?

3. Finalement, quelle est la source des interactions fortes entre les quarks? La source de l'interaction électromagnétique est l'électricité, quelle est-elle pour l'interaction forte? Et comment est véhiculée cette interaction? De la même façon que le photon véhicule l'interaction électromagnétique d'une particule chargée à une autre particule chargée, existe-t-il des médiateurs de l'interaction forte entre quarks?

L'introduction de la couleur (par Greenberg) permet de franchir un pas important. On suppose que les quarks possèdent, en plus de la saveur (u, d, c, s, t, b), une couleur. Par analogie avec l'optique où il faut trois couleurs fondamentales pour reproduire, par mélange, une couleur quelconque, on postule l'existence de trois couleurs pour les quarks. La couleur est la source de l'interaction forte. Conventionnellement on désigne ces couleurs par R, B et V. De la même façon que la saveur est associée au groupe $SU(6)$ on associera la couleur à un groupe $SU(3)_c$ (l'indice c rappelle qu'il s'agit du groupe de la couleur, afin d'éviter la confusion avec le $SU(3)$ de la saveur qui a été introduit au moment où l'on connaissait seulement les trois quarks u, d et s). Les trois couleurs sont portées par tous les quarks, quelle que soit leur saveur, ce qui donne en tout 18 états:

$$
\begin{array}{cccccc}
u_R & d_R & c_R & s_R & t_R & b_R \\
u_B & d_B & c_B & s_B & t_B & b_B \\
u_V & d_V & c_V & s_V & t_V & b_V
\end{array}
$$

Les trois couleurs R, B et V constituent la représentation fondamentale de $SU(3)_c$. Dans le diagramme représentatif elles occupent respectivement les points de coordonnées $(+1/2,\ +1/3)$,

$(-1/2, +1/3)$ et $(0, -2/3)$. La représentation conjuguée $\overline{3}$ est formée des anti-couleurs (couleurs complémentaires), soit $\overline{R}$, $\overline{B}$ et $\overline{V}$. Les points correspondants occupent respectivement les points de coordonnées $(-1/2, -1/3)$, $(+1/2, -1/3)$ et $(0, +2/3)$. Il y a huit générateurs infinitésimaux, dont deux diagonaux qui servent à indiquer où l'on se trouve dans l'espace des couleurs (deux suffisent puisque les trois couleurs sont complémentaires, leur mélange donnant du blanc). Les autres générateurs sont des opérateurs de transfert qui changent les couleurs des quarks.

Mais le groupe $SU(3)_c$ va aussi devenir un *groupe de jauge*, et ses générateurs seront associés à des particules, les huit *gluons* qui seront les médiateurs de l'interaction forte entre les quarks, en analogie avec le photon qui est associé au seul générateur du groupe de jauge $U(1)$, le groupe de jauge de l'électrodynamique quantique. C'est pourquoi la théorie des interactions fortes construite sur $SU(3)_c$ a reçu le nom de *chromodynamique quantique*. Contrairement à l'électrodynamique quantique, la chromodynamique quantique est une théorie de jauge *non abélienne* et ceci va lui donner des propriétés très particulières.

On postule ensuite que les seules particules isolables sont sans couleur, plus rigoureusement des *singulets* de la couleur, associés à la représentation 1. On a déjà vu que cette représentation 1 était antisymétrique. La fonction d'onde globale du Δ^{++} sera donc antisymétrique et satisfera au principe de Pauli. Dans l'espace de la couleur le Δ^{++} sera représenté par:

$$RBV + BVR + VRB - BRV - RVB - VBR$$

Enfin, la façon la plus simple d'obtenir la représentation 1 est

$$3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$$

ou

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Ceci montre que les particules isolables sont les systèmes $q\overline{q}$ (mésons) et les systèmes qqq (baryons). Les quarks ne sont pas isolables car ils sont dans la représentation 3. Les diquarks sont dans des représentations 6 et $\overline{3}$ et ne sont pas isolables non plus. Même conclusion pour les gluons qui constituent la représentation 8. Evidemment on devrait pouvoir isoler des systèmes $q\overline{q}q\overline{q}$, $qqqqqq$, $q\overline{q}q\overline{q}q\overline{q}$, $qqqqqqqqq$, ainsi que des particules formées uniquement de gluons (glue balls). Il n'y a pas de preuves convaincantes de l'existence de ces objets. Leurs masses peuvent être élevées, les largeurs de masse peuvent être grandes (particules très instables) de sorte que leur non-observation ne peut pas être considérée comme allant contre le modèle.

On peut aussi imaginer que dans des conditions particulières de densité et de température les sacs de quarks existant dans les noyaux peuvent se rompre et donner lieu à un nouvel état de la matière nucléaire, le plasma de quarks et de gluons. Il y aurait déconfinement sur tout le volume du noyau, celui-ci restant cependant un singulet de la couleur. Des calculs quantitatifs en chromodynamique quantique montrent qu'une transition de phase peut conduire de la phase hadronique (sacs de mésons et de baryons) au plasma de quarks et de gluons. Il faut atteindre des densités nucléaires de l'ordre de dix fois la densité normale ou encore des températures extrêmement élevées. Les collisions entre ions lourds très énergétiques (on dit *ions lourds relativistes*) peuvent produire en laboratoire les conditions favorables et il existe une intense activité expérimentale (en particulier au Centre Européen de Recherches Nucléaires à Genève) pour étudier les propriétés des états nucléaires de haute densité.

8 La chromodynamique quantique

Nous allons maintenant nous intéresser au groupe $SU(3)_c$ en tant que groupe de jauge. Nous avons vu dans le chapitre 2 l'exemple d'une théorie de jauge construite sur le groupe $U(1)$. Il est facile de généraliser. Comparons dans une table les propriétés d'une théorie de jauge abélienne (construite sur $U(1)$, le groupe unitaire à une dimension) avec une théorie de jauge non-abélienne, construite sur $SU(3)_c$. On rappelle que les générateurs de $SU(3)$ satisfont à la relation

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c \qquad a, b, c = 1, 8$$

Une somme sur un indice répété est sous-entendue.

Cas abélien	Cas non-abélien
Groupe $U(1)$	Groupe $SU(3)$
$D_\mu(x) = \partial_\mu - igA_\mu(x)$	$D_\mu(x) = \partial_\mu - igA^a_\mu(x)F_a$ (somme sur $a = 1, 8$)
$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp[ig\alpha(x)]\psi(x)$	$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp[ig\alpha^a(x)F_a]$
$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$	$A^a_\mu(x) \to A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) + \partial_\mu\alpha^a(x) + f_{abc}\alpha^b(x)A^c_\mu(x)$
$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$
$\mathcal{L}_{EDQ} = -1/4 F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ($\sim A^2$)	$\mathcal{L}_{CDQ} = -1/4 F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$ ($\sim A^2, A^3, A^4$)

avec:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

La première ligne rappelle la définition de la dérivée covariante. Dans le cas de $SU(3)$ il faut introduire huit champs de jauge A^a_μ, autant qu'il y a de générateurs F_a. La deuxième ligne rappelle la transformation de jauge locale à appliquer au champ de matière. Elle fait intervenir huit paramètres locaux α^a et s'applique à un état à trois composantes sur lequel agissent les matrices 3×3, les F_a. Ensuite, on passe à la transformation des champs de jauge A^a_μ. Dans le cas non-abélien on note la présence d'un terme supplémentaire qui résulte de la non-commutation des matrices F_a. Puis on définit l'équivalent du champ électromagnétique $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}F_a$. On note aussi la présence d'un terme supplémentaire quadratique (en A^2). Le Lagrangien du champ de gluons est écrit par analogie avec le champ électromagnétique. Une différence importante cependant: alors que le champ électromagnétique ne contient que des termes en A^2 le champ de gluons contient des termes en A^2, A^3 et A^4. Cela va changer beaucoup de choses dans la physique. Une première conséquence concerne l'interaction entre gluons. En électrodynamique quantique on sait que deux photons ne peuvent pas interagir directement. Ils doivent le faire par l'intermédiaire de paires virtuelles électron-positron. Ceci parce que les photons sont électriquement neutres. Un diagramme en A^2 représente l'annihilation d'un photon et sa création. En chromodynamique quantique les gluons sont colorés et peuvent interagir directement sans avoir à passer par des créations de paires virtuelles quark-antiquark. Un diagramme en A^3 contient trois lignes de gluons et représente donc une interaction, de même qu'un diagramme en A^4 qui contient quatre lignes de gluons.

9 La variation des "constantes" de couplage

La force de l'interaction électromagnétique est caractérisée par la valeur de la charge électrique e, qui est tout simplement la constante de couplage associée au groupe de jauge construit sur le groupe $U(1)$. On définit aussi une quantité sans dimension, $\alpha = e^2/\hbar c$, appelée *constante de structure fine* à cause du rôle qu'elle joue dans l'explication de la structure fine des spectres atomiques. En fait, cette appellation est mal choisie car α varie en fonction de la distance, ou encore, ce qui revient au même, du moment de transfert. Ce dernier est défini par $q^2 = -(p'_\mu - p_\mu)^2$, où p_μ et p'_μ sont respectivement les quadrivecteurs d'une particule avant et après une interaction. On voit que q^2 est aussi le carré de la masse du photon virtuel échangé lors d'une interaction électromagnétique. Au moyen de la relation $\hbar c = 200$ MeV-Fm on peut établir une correspondance entre le moment de transfert $\sqrt{q^2}$ et la distance d'approche des particules:

$$\begin{array}{ccc} 200 \text{ MeV} & \rightarrow & 10^{-13} \text{ cm} \\ 200 \text{ GeV} & \rightarrow & 10^{-16} \text{ cm} \\ 200 \text{ TeV} & \rightarrow & 10^{-19} \text{ cm} \\ 2 \times 10^{15} \text{ GeV} & \rightarrow & 10^{-29} \text{ cm} \\ 2 \times 10^{19} \text{ GeV} & \rightarrow & 10^{-33} \text{ cm} \end{array}$$

Pourquoi la "constante" α varie-t-elle? Suite à sa capacité d'interaction électromagnétique un électron émet et réabsorbe continuellement des photons virtuels de toutes masses, et ces photons virtuels peuvent se matérialiser de façon transitoire en des paires électron-positron virtuelles. Un électron est donc finalement un objet fort complexe avec une étendue dans l'espace. Il est assez facile de comprendre pourquoi deux électrons qui s'approchent voient leur constante de couplage se modifier. L'électrodynamique quantique (EDQ) permet de calculer la variation de α , qui augmente très lentement (de façon logarithmique) lorsque le moment de transfert augmente (donc quand la distance diminue). Dans le cadre de la chromodynamique quantique (CDQ) on prédit un effet semblable sur la constante g (associée au groupe $SU(3)_c$ cette fois) ou encore sur la quantité sans dimension $\alpha_S = g^2/\hbar c$ (où l'indice S rappelle qu'il s'agit de l'interaction forte). Mais il y a une différence considérable, due au fait que le groupe de jauge est non-abélien. Dans le cas de l'interaction électromagnétique, décrite par un groupe de jauge abélien, les photons virtuels sont électriquement neutres et la variation de α est seulement due aux paires virtuelles électron-positron. Dans les cas de l'interaction forte les gluons sont colorés, ils contribuent donc aussi, en plus des paires virtuelles quark-antiquark. Mais le calcul montre que leur influence est prépondérante et qu'elle va dans le sens contraire de celle des paires q-$\overline{q}$. La constante α_S diminue quand le moment de transfert augmente (ou quand la distance diminue). Cette variation est logarithmique, et décrite de façon approximative par

$$\alpha_S(q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\ln(q^2/\Lambda^2)}$$

où n_f est le nombre de familles de fermions et Λ un paramètre caractéristique de la CDQ. On sait que λ est de l'ordre de 100 MeV. Pour des valeurs de q^2 de cet ordre de grandeur α_S tend vers l'infini et ceci peut être relié au confinement. La distance de confinement est de l'ordre de 10^{-13} cm, soit la taille d'un hadron. A très courte distance, par contre, l'interaction entre quarks devient très faible et cette propriété a reçu le nom de *liberté asymptotique*. Dans ces conditions, les interactions fortes (qui sont devenues faibles) peuvent être traitées par des méthodes de perturbation, ce qui constitue un énorme avantage. Par contre, à plus bas moment de transfert (ou à plus grande distance) de tels calculs ne sont plus possibles. Il y a donc deux aspects différents dans la CDQ: pertubatif et non-perturbatif.

10 Les "jets"

A titre d'exemple, examinons ce qui se passe lors d'une collision électron-positron à haute énergie, telle que réalisée au Laboratoire DESY à Hambourg. On dispose d'un anneau (PETRA) où circulent en sens inverse des électrons et des positrons de 20 GeV (énergie totale 40 GeV). Il y a annihilation électron-positron en un photon virtuel qui va ensuite se matérialiser en une paire de fermions (une particule et son anti-particule): on pourra revenir à une paire e^+-e^-, mais aussi créer une paire μ^+-μ^-, une paire τ^+-τ^-, ou finalement une paire $\overline{q}$-q, en respectant la conservation de la saveur et de la couleur. Pour conserver la quantité de mouvement les deux particules sont émises dans des directions opposées. S'il s'agit de leptons ce sont des particules observables dans les détecteurs. La situation est différente pour les quarks qui ne sont pas isolables. Quand leur distance augmente une partie de leur énergie cinétique est convertie en masse pour créer de nouvelles paires q-$\overline{q}$. Il y a ensuite réarrangement de tous ces quarks et anti-quarks pour former des hadrons (singulets de la couleur), mésons, baryons et leurs antiparticules. C'est le phénomène de *l'hadronisation* (on dit aussi *fragmentation* mais on devrait éviter ce terme dont la signification ne correspond pas à la réalité). Ces "jets" peuvent contenir, suivant l'énergie disponible, des dizaines ou des centaines de particules, mais ils sont émis dans des directions qui sont corrélées avec celles des particules primaires, donc à 180^o l'un de l'autre. On observe ces événements à deux "jets" dans les détecteurs, en parfait accord avec la prédiction de la CDQ. Mais cette théorie prédit aussi l'existence d'événements à trois "jets". De la même façon qu'un électron subissant une accélération émet un photon de freinage (Bremsstrahlung) un quark peut émettre un gluon de freinage. Comme ce gluon n'est pas isolable il doit aussi s'hadroniser et l'état final de la réaction contient trois "jets". Il est aussi possible (quoique avec des probabilités plus faibles) d'observer des événements avec plus de trois "jets".

11 L'effet *Drell-Yan*

Considérons maintenant une collision entre un proton et un antiproton, telle que réalisée au CERN, dans l'anneau du $SP\overline{P}S$. On y fait tourner, en sens inverse, des faisceaux de protons et d'antiprotons à des énergies pouvant atteindre 450 GeV par faisceau. C'est une façon de produire des collisions $\overline{q}$-q (et aussi q-gluon, $\overline{q}$-gluon, gluon-gluon). Un quark peut s'annihiler avec un antiquark (en respectant la conservation de la saveur et de la couleur) pour donner un photon virtuel, qui pourra ensuite donner une paire de leptons: e^+-e^-, μ^+-μ^-, etc... C'est l'inverse de ce qui se produit a PETRA. Quant aux autres quarks et anti-quarks du proton et de l'antiproton initiaux, ils vont s'hadroniser et donner des "jets". Ce phénomène est aussi calculable par la CDQ (sections efficaces en fonction de la masse invariante de la paire de leptons par exemple) et nous renseigne sur les états quantiques des quarks et des gluons à l'intérieur des hadrons. On observe aussi l'effet Drell-Yan dans la collision d'un faisceau de pions avec une cible fixe de nucléons. Mais une chose remarquable est l'existence de l'effet Drell-Yan dans les collisions proton-proton. Puisque cet effet est interprété comme une collision quark-antiquark, d'où viennent les antiquarks dans la collision proton-proton?

Jusqu'ici nous avons utilisé une image un peu trop simpliste pour un hadron. Par exemple, nous nous sommes représenté un proton comme formé de trois quarks interagissant par échange de gluons. Mais un gluon peut se matérialiser en une paire $\overline{q}$-q ($\overline{u}$-u, $\overline{d}$-d, mais aussi $\overline{s}$-s, $\overline{c}$-c, etc...). En plus des trois quarks dits *de valence*, soit uud, un proton contient des gluons mais aussi des paires q-$\overline{q}$ dites appartenir à la *mer* (en anglais on dit *valence quarks* et *sea quarks*). Oui, nous avons dans nos cellules des quarks et des antiquarks étranges, charmés, etc... L'effet Drell-Yan dans les collisions proton-proton nous donne des informations sur la mer. On constate expérimentalement que la section efficace de l'effet Drell-Yan proton-proton est beaucoup plus petite que celle de l'effet Drell-Yan proton-antiproton ou pion-proton.

12 La diffusion inélastique profonde

C'est la traduction de *deep inelastic scattering*. On utilise des électrons ou des neutrinos de haute énergie pour sonder l'intérieur des hadrons. Le processus élémentaire est une collision lepton-quark, avec hadronisation du quark diffusé et des quarks spectateurs. On voit donc que les moyens d'investigation de la structure des hadrons sont multiples (physique e^+-e^-, effet Drell-Yan, diffusion inélastique profonde). Toutes les observations convergent pour dire que la CDQ constitue une bonne description des interactions fortes, ce qui renforce notre conviction que les théories de jauge (EDQ, CDQ) doivent être utilisés pour expliquer tous les phénomènes de la nature.