Chapitre 1

Rappel sur l'équation de Dirac

1 L'équation de Dirac

1.1 Pourquoi l'équation de Dirac?

L'équation de Schrödinger semble suffisante dans bien des domaines: en physique du solide, en physique nucléaire (encore que dans ce cas on peut se poser des questions). L'une des propriétés de l'équation de Schrödinger est son caractère non-relativiste. Nous ne chercherons pas à démontrer ici cette équation. En fait elle ne se démontre pas, on doit plutôt la considérer comme un postulat qui trouve sa justification dans les vérifications expérimentales de ses conséquences. Cependant, on peut déduire l'équation de Schrödinger de l'expression classique (et non-relativiste):

$$\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r},t) - E = 0 \tag{1}$$

en faisant correspondre aux grandeurs classiques des opérateurs:

$$\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\,\vec{\nabla} \qquad\qquad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

$$\vec{r} \to \vec{r} \qquad\qquad V(\vec{r},t) \to V(\vec{r},t) \tag{3}$$

ce qui donne:

$$\left[-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi(\vec{r},t) = 0 \tag{4}$$

Ceci met clairement en évidence le caractère non-relativiste de l'équation de Schrödinger. On doit évidemment s'attendre à ce que cette équation soit inadéquate pour décrire certains phénomènes, ceux qui mettent en jeu des vitesses proches de la vitesse de la lumière. Par exemple, en radioactivité β, des électrons (ou positrons) sont émis par les noyaux avec des énergies de plusieurs MeV, ce qui représente plusieurs fois la masse au repos de ces particules (0.511 MeV). Quant aux neutrinos, particules auxquelles on attribue une masse nulle (jusqu'à preuve du contraire), ils se propagent à la vitesse de la lumière. En physique des hautes énergies, des particules plus lourdes, comme les protons, atteignent des énergies qui sont grandes par rapport à leur masses au repos.

L'équation de Schrödinger est invariante dans les transformations de Galilée (on dira qu'elle est invariante dans le groupe de Galilée). Cependant, on a de bonnes raisons de postuler que les lois de la physique sont plutôt invariantes dans le groupe de Lorentz (comme le sont les équations de Maxwell). Dans la mesure où le groupe de Galilée constitue la limite non-relativiste du groupe de Lorentz, on voit que l'équation de Schrödinger sera correcte dans la limite des vitesses faibles. Ce n'est pas souvent le cas en physique des particules. On comprend donc qu'il soit nécessaire de disposer d'une équation d'onde relativiste, qui possède l'invariance de Lorentz. L'équation de Schrödinger devra pouvoir se déduire d'une telle équation en passant à la limite non-relativiste.

1.2 Rappel sur l'équation de Schrödinger

Une bonne partie de l'interprétation physique de l'équation de Schrödinger repose sur une équation de continuité qui peut s'établir facilement. Multiplions les deux membres de (1) par Ψ^* (complexe conjugué de Ψ) et les deux membres de l'équation complexe conjuguée de 4 par Ψ, puis soustrayons membre à membre. On obtient:

$$i\hbar\left[\Psi^*\frac{d\Psi}{dt} + \Psi\frac{d\Psi^*}{dt}\right] + \frac{h^2}{2m}\left[\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right] = 0 \tag{5}$$

soit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\Psi\right) + \frac{h}{2im}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right) = 0 \tag{6}$$

Définissons:

$$\rho = \Psi^*\Psi \quad \text{(densité de probabilité)} \tag{7}$$

$$\vec{j} = \frac{h}{2im}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right) \quad \text{(densité de courant de probabilité).} \tag{8}$$

Ces deux quantités satisfont à l'équation:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \quad \text{(équation de continuité).} \tag{9}$$

On peut faire l'analogie avec un fluide dont la densité en chaque point de l'espace est $\rho(\vec{r},t)$ et qui s'écoule le long des lignes de force du vecteur $\vec{j}(\vec{r},t)$. L'équation (2) exprime la conservation du fluide. Notons que cette interprétation ne pose pas de problème du fait que ρ est une quantité non négative.

****

Exercice: Dans ce qui précède on a supposé le potentiel V réel. Examinez ce que devient l'équation (2) dans le cas d'un potentiel complexe. Connaissez vous un problème où l'on fait usage d'un potentiel complexe?

****

À titre d'exemple, en physique nucléaire, la quantité ρ représente la densité de probabilité de présence d'un nucléon dans un noyau, alors que la quantité $\vec{j}$ intervient dans le calcul des distributions angulaires des réactions.

1.3 Rappel sur la théorie de Pauli

L'équation de Schrödinger s'applique à une particule purement ponctuelle. Pour une particule dotée d'un degré de liberté supplémentaire (le spin), par exemple un électron, il faut compléter l'équation de Schrödinger par un terme d'interaction magnétique:

$$\left(-\frac{h^2}{2m}\,\nabla^2 + V(\vec{r},t) + \mu_0(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \right)\Psi(\vec{r},t) = 0 \tag{10}$$

La quantité $\Psi(\vec{r},t)$ est maintenant un spineur à deux composantes:

$$\Psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r},t) \\ \Psi_2(\vec{r},t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

On a introduit les matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

1.4 L'équation de Klein-Gordon:

On peut former une équation d'onde relativiste en remplaçant les grandeurs classiques par des opérateurs dans l'équation:

$$p^2c^2 + m_0^2c^4 - E^2 = 0 \tag{13}$$

On trouve, après quelques réarrangements:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi = 0 \tag{14}$$

Pour $m_0 = 0$ on retrouve une expression familière, l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, où Ψ représente l'une des six quantités $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$ et $\mathcal{H}_z$. Nous rappelant l'interprétation physique de l'équation de Schrödinger, il est normal de se poser la question suivante: peut-on, à partir de l'équation de Klein-Gordon, définir une densité de probabilité de présence ρ, une densité de courant $\vec{j}$, et écrire une équation de conservation avec ces deux quantités?

On trouve facilement:

$$\vec{\nabla}\cdot(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) = 0 \tag{15}$$

En posant:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) \quad \text{(densité de probabilité)} \tag{16}$$

$$\vec{j} = \frac{h}{2im_0}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right) \quad \text{(densité de courant de probabilité).} \tag{17}$$

on arrive à une équation de conservation du type:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{18}$$

Cependant, contrairement à ce qui se passe pour l'équation de Schrödinger, la nouvelle quantité ρ n'est plus nécessairement non-négative, ce qui rend problématique son interprétation comme densité de probabilité. En fait, cette difficulté n'est pas insurmontable. Par exemple, on peut appliquer l'équation de Klein-Gordon aux mésons π^+ et π^-. La quantité $e\rho$ (où e est la charge électrique élémentaire) peut être interprétée comme une densité de charge électrique, qui peut être aussi bien négative que positive.

Un autre inconvénient de l'équation de Klein-Gordon est son caractère d'équation du second ordre en t (l'équation de Schrödinger, elle, est du premier ordre en t). L'évolution d'un système physique dans le temps ne sera plus déterminée par la seule donnée de la fonction d'onde à un instant initial $\Psi(t_0)$, il faudrait préciser en plus la valeur de la dérivée première $\partial\Psi/\partial t$ à l'instant t_0. Ceci est apparemment en contradiction avec les principes de la mécanique quantique, suivant lesquels toute l'information que l'on peut avoir sur un système physique est contenue dans la fonction d'onde.

Finalement, la validité de l'équation de Klein-Gordon doit pouvoir se vérifier par l'expérience. Or, si l'on applique cette équation au calcul des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène on aboutit à une structure fine qui n'est pas celle que l'on observe expérimentalement. Cette équation est donc inapplicable à l'électron (il faudrait d'ailleurs trouver un moyen d'introduire le spin).

On continue cependant à utiliser l'équation de Klein-Gordon pour des particules sans spin, comme le méson π.

1.5 L'équation de Dirac

Donnons nous comme programme de trouver une équation qui soit relativiste (invariante dans les transformations de Lorentz) et qui soit applicable à l'électron (particule de spin 1/2). Pour éviter certaines difficultés de l'équation de Klein-Gordon on souhaiterait avoir une équation qui soit du premier ordre dans la variable temps. La structure des transformations de Lorentz, où les coordonnées d'espace et de temps apparaissent de façon symétrique, nous suggère que cette équation devrait aussi être du premier ordre dans les variables d'espace. Ceci contraste avec ce qui se passe pour l'équation de Schrödinger. Par contre, cela nous fait penser aux équations de Maxwell, car elles sont du premier ordre en x, y, z et t. Dans ce qui suit, on pourra se limiter aux équations du champ électromagnétique dans le vide et on ne se préoccupera pas du problème des unités de mesure:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{19}$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad\qquad \text{div } \vec{\mathcal{H}} = 0 \tag{20}$$

Il est possible de mettre ces équations sous une forme intéressante (ceci est tiré d'un cours donné par V. Weisskopf au CERN)[1]. Notons pour cela que l'opérateur rotationnel peut s'écrire sous forme matricielle:

$$\text{rot} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Introduisons les matrices (3×3):

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

On trouve alors:

$$\text{rot} = \frac{1}{\hbar}\,(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}) \tag{23}$$

On vérifie facilement les relations de commutation des moments angulaires:

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \tag{24}$$

****
Exercice: Calculer les matrices Σ_x^2, Σ_y^2, Σ_z^2, Σ_x^3, Σ_y^3, Σ_z^3, etc... Calculer la somme $\Sigma^2 = \Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2$
****

On peut écrire $\Sigma^2 = S(S+1)$ avec $S = 1$, ce qui établit la relation des matrices $\vec{\Sigma}$ avec le spin 1.

Définissons maintenant un vecteur à six composantes:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}} \\ i\vec{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Les équations de Maxwell:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \qquad\qquad \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \tag{26}$$

peuvent être mises sous la forme:

$$\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}} \\ i\vec{\mathcal{H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{rot} \\ \text{rot} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}} \\ i\vec{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \tag{27}$$

ou encore:

$$i\hbar\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\Sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\Sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\vec{F} \tag{28}$$

Définissons une matrice (6×6)

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\Sigma} \\ \vec{\Sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

et introduisons de nouveau l'opérateur

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{30}$$

On trouve:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - E)\vec{F} = 0 \tag{31}$$

****

<u>Exercice</u>: Établir les relations

$$[\alpha_i, \alpha_j] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \qquad\qquad [\alpha_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\alpha_k \tag{32}$$

où la matrice $\vec{\Sigma}$ (6×6) est définie par:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\Sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\Sigma} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Calculer les matrices α_x^2, α_y^2, α_z^2, α_x^3, α_y^3, α_z^3, etc... ainsi que $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2$

****

On peut, par applications successives de l'opérateur $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$, construire une équation du second ordre:

$$\left[(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) - E^2\right]\vec{F} = 0 \tag{34}$$

Si l'on utilise les conditions supplémentaires $\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{H}} = 0$ et $\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$, elle se réduit à:

$$(p^2 - E^2)\vec{F} = 0 \tag{35}$$

soit encore:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{F} = 0 \tag{36}$$

ce qui est l'équation de Klein-Gordon avec $m_0 = 0$. Par analogie, peut-on trouver des équations du premier ordre, s'appliquant à une particule de spin $1/2$, et qui auraient pour conséquence une équation de Klein-Gordon pour une masse m_0 quelconque? On s'attend à ce que ces équations du premier ordre (analogues aux équations de Maxwell) fassent intervenir deux spineurs Ψ_1 et Ψ_2 à deux composantes (analogues aux deux vecteurs $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$) que l'on pourra associer comme cela a été fait pour le champ électromagnétique:

$$\Psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r},t) \\ \Psi_2(\vec{r},t) \end{pmatrix} \tag{37}$$

Pour une particule de masse nulle, on écrira, par analogie avec ce qui précède:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - E)\Psi = 0 \tag{38}$$

avec:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

(matrice 4×4), les $\vec{\sigma}$ étant les matrices de Pauli (2×2).

Pour une particule de masse non nulle on essaiera une équation de la forme:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0 - E)\psi = 0 \tag{40}$$

où β est une autre matrice 4×4. On exigera ensuite que l'équation de Klein-Gordon soit une conséquence de l'équation 40. Remarquons que les opérateurs $\vec{\alpha}$ et β agissent sur les variables internes de la particule, donc ils commutent avec les opérateurs $\vec{p}$ et E qui agissent sur les coordonnées d'espace-temps. On a donc:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0)(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0)\Psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0)E\Psi = E(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0)\Psi = E^2\Psi \tag{41}$$

soit:

$$\left[(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})^2 + (\vec{\alpha}\beta + \beta\vec{\alpha})m_0\vec{p} + \beta^2 m_0^2\right]\Psi = E^2\Psi \tag{42}$$

avec

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})^2 = \alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + (\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)p_x p_y + \ldots \tag{43}$$

On retombera sur l'équation de Klein-Gordon en posant:

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1 \tag{44}$$

et:

$$\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = \alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = \alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z = 0 \tag{45}$$

$$\beta\alpha_x + \alpha_x\beta = \beta\alpha_y + \alpha_y\beta = \beta\alpha_z + \alpha_z\beta = 0 \tag{46}$$

En résumé les quatre matrices $\vec{\alpha}$ et β ont pour carré l'unité et elles anticommutent deux à deux. On remarque que la relation classique:

$$p^2 + m_0^2 = E^2 \tag{47}$$

s'écrit aussi:

$$\frac{\vec{p}}{E} \cdot \vec{p} + \frac{m_0}{E} m_0 = E \tag{48}$$

ou encore:

$$\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{p} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} m_0 = E \tag{49}$$

L'opérateur $\vec{\alpha}$ correspond donc formellement à $\vec{v}/c$ et l'opérateur β à $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

****

<u>Exercice</u>: Quelles sont les valeurs propres des matrices $\vec{\alpha}$ etβ? Comment peut-on interpréter la correspondance signalée plus haut?

****

1.6 Une forme symétrique de l'équation de Dirac

Nous utiliserons les notations tensorielles, et le tenseur métrique sera:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Les coordonnées d'espace temps contravariantes sont: $x^\mu = (t, x, y, z)$ et les coordonnées covariantes: $x_\mu = (t, -x, -y, -z)$ L'équation:

$$\left[\frac{1}{i}\,(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + \beta m_0\right] \Psi = i \frac{\partial}{\partial t}\, \Psi \tag{51}$$

s'écrit aussi:

$$\left[i\,\beta\,(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + i\beta \frac{\partial}{\partial t} - m_0\right] \Psi = 0 \tag{52}$$

en posant:

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^1 = \beta\ \alpha_x \quad \gamma^2 = \beta\ \alpha_y \quad \gamma^3 = \beta\ \alpha_z \tag{53}$$

On obtient:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi = 0 \tag{54}$$

avec:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{55}$$

Les matrices γ^μ satisfont à la relation:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{56}$$

On définit aussi la matrice:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{57}$$

****
<u>Exercice</u>: Que peut-on dire des matrices $(\gamma^\mu)^2$, $(\gamma^5)^2$?
Quelles matrices γ^μ sont hermitiques? antihermitiques?
Montrez que $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.
Quelles matrices γ^μ sont réelles? imginaires pures?
Quelles matrices γ^μ sont symétriques? antisymétriques?
Quelles sont les propriétés de la matrice γ^5?
****

1.7 Le spineur de Dirac adjoint

En prenant l'équation de Dirac hermitique adjointe:

$$-i\partial_\mu\Psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - m_0\Psi^\dagger = 0 \tag{58}$$

et compte tenu de:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{59}$$

on trouve:

$$-i\partial_\mu\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 - m_0\Psi^\dagger = 0 \tag{60}$$

$$-i\partial_\mu\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu - m_0\Psi^\dagger\gamma^0 = 0 \tag{61}$$

On définit le spineur adjoint $\overline{\Psi}$:

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \tag{62}$$

D'où l'équation:

$$i\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu + m_0\overline{\Psi} = 0 \tag{63}$$

Ce qui peut encore s'écrire:

$$\overline{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m_0) = 0 \tag{64}$$

en convenant que le symbole de dérivation agit vers la gauche.
****
<u>Exercice</u>: démontrer la relation

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \tag{65}$$

Quelle est son interprétation physique?
****

1.8 Invariance de jauge

L'équation de Dirac est manifestement invariante dans la transformation

$$\psi(x^\mu) \to \psi'(x^\mu) = \exp(ig\alpha)\psi(x^\mu) \tag{66}$$

où g est une constante et α indépendant des x^μ. La transformation précédente est une transformation de jauge "globale". Contrairement aux apparences, une telle invariance n'est pas triviale. Suivant le théorème de Noether elle a pour conséquence l'existence d'un courant conservé.

Que se passe-t-il si maintenant α est fonction des x^μ (transformation de jauge "locale")? Il est clair que l'équation de Dirac n'est plus invariante, à cause du terme dérivatif $\partial_\mu\alpha$. On peut rétablir l'invariance en introduisant la dérivée "covariante":

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{67}$$

où A_μ est fonction des x_μ. Il suffit de demander que $D_\mu\psi$ se transforme de la même façon que ψ:

$$D'_\mu\psi' = \exp(ig\alpha)D_\mu\psi \tag{68}$$

$$(\partial_\mu - igA'_\mu)\exp(ig\alpha)\psi = \exp(ig\alpha)(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \tag{69}$$

ce qui donne:

$$ig\exp(ig\alpha)(\partial_\mu\alpha)\psi + \exp(ig\alpha)\partial_\mu\psi - igA'_\mu\exp(ig\alpha)\psi = \exp(ig\alpha)(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \tag{70}$$

et finalement:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha \tag{71}$$

En résumé, l'équation de Dirac:

$$\Big[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m_0\Big]\psi = 0 \tag{72}$$

est invariante dans la tranformation de jauge locale:

$$\psi \to \psi' = \exp(ig\alpha)\psi \qquad\qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha \tag{73}$$

Mais ce n'est plus l'équation d'une particule libre. La particule est en interaction avec un champ A_μ qui en fait est le champ électromagnétique, ainsi qu'on peut le montrer facilement. La constante de couplage g est simplement la charge électrique.

On définit le tenseur antisymétrique:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{74}$$

****

<u>Exercice</u>: montrer que $F_{\mu\nu}$ est invariant de jauge. Identifier les diverses composantes de $F_{\mu\nu}$ avec les composantes des champs électrique et magnétique.

****

On peut alors construire le Lagrangien:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \overline{\psi}\Big[\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m_0\Big]\psi \tag{75}$$

Le premier terme décrit le champ électromagnétique pur et le second décrit l'électron en interaction avec le champ. En utilisant le calcul des variations on arrive aux équations de Maxwell et à l'équation de Dirac.

Notons l'absence d'un terme de la forme $A^\mu A_\mu$ qui n'est pas invariant de jauge. Un terme de ce genre devrait être précédé d'un coefficient ayant la dimension d'une masse au carré. Cette masse ne pourrait être que celle du photon. On peut donc relier la masse nulle du photon à la nécessité de préserver l'invariance de jauge.

****

<u>Exercice</u>: utiliser les équations de Lagrange:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = \frac{\partial L}{\partial\psi} \qquad \text{et} \qquad \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_\nu} \tag{76}$$

pour obtenir les équations de Maxwell et l'équation de Dirac. On montrera aussi que:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{77}$$

****

Le grand avantage de l'Électro-Dynamique Quantique (EDQ) est son caractère renormalisable, qui permet d'effectuer des calculs non-ambigus à tous les ordres de perturbations. Nous verrons que cet avantage peut être étendu aux théories de jauge non-abéliennes à symétrie spontanément brisée.

2 Conjugaison de charge

Reprenons l'équation de Dirac avec champ électromagnétique:

$$\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m_0\right]\psi = 0 \tag{78}$$

et appliquons la conjugaison complexe:

$$\left[-i(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu + ieA_\mu) - m_0\right]\psi^* = 0 \tag{79}$$

Il est facile de montrer que les matrices $(-\gamma^\mu)^*$ satisfont aux mêmes relations d'anti-commutation que les matrices γ^μ. Il existe donc une matrice C telle que:

$$(-\gamma^\mu)^* = C^{-1}\gamma^\mu C \tag{80}$$

(voir littérature sur les propriétés mathématiques des matrices γ). On est donc conduit à l'équation:

$$\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m_0\right]C\psi^* = 0 \tag{81}$$

Si ψ décrit un électron, $\psi^c = C\psi^*$ décrit un positron (ou vice-versa).
Avec la représentation usuelle des matrices γ la matrice C prend la forme $C = i\gamma^2$ (le facteur i est purement conventionnel). Par ailleurs, il existe une représentation (dite "représentation de Majorana") dans laquelle la matrice C est tout simplement la matrice identité. La conjugaison de charge se ramène à la conjugaison complexe.

3 Solutions de l'équation de Dirac: ondes planes

L'équation de Dirac:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0 - E)\Psi = 0 \tag{82}$$

où $\vec{p}$ et E sont les opérateurs:

$$\vec{p} = \frac{1}{i}\,\vec{\nabla} \qquad\qquad E = i\partial_t \tag{83}$$

s'écrit aussi:

$$\left(\frac{1}{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m_0 - i\partial_t\right)\Psi = 0 \tag{84}$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur de composantes $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Les symboles $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ et ∂_t représentent les dérivations par rapport à x, y, z et t, respectivement.

Cette équation admet des solutions (ondes planes) de la forme:

$$\Psi = \psi \exp \left[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right] \tag{85}$$

où maintenant $\vec{p}$ et E sont des nombres. On arrive à l'équation:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 - E)\psi = 0 \tag{86}$$

où ψ est un spineur à 4 composantes, indépendant des variables $\vec{r}$ et t.

3.1 Une représentation particulière

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = -i\alpha_x \alpha_y \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{87}$$

où I est la matrice unité (2×2).

L'équation de Dirac prend alors la forme:

$$\begin{pmatrix} m_0 - E & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m_0 - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{88}$$

d'où les deux équations:

$$(m_0 - E)u + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})v = 0 \tag{89}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u - (m_0 + E)v = 0 \tag{90}$$

En appliquant $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$ à la première équation:

$$(m_0 - E)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 v = 0 \tag{91}$$

et en utilisant la seconde équation:

$$(m_0 - E)(m_0 + E)v + p^2 v = 0 \tag{92}$$

on trouve la condition de compatibilité:

$$m_0^2 + p^2 - E^2 = 0 \tag{93}$$

qui admet deux types de solutions:

$$E = +\epsilon \qquad \text{(solutions à énergie positive)} \tag{94}$$

$$E = -\epsilon \qquad \text{(solutions à énergie négative)} \tag{95}$$

avec $\epsilon = \sqrt{m_0^2 + p^2}$. On considère donc deux cas.

3.2 Solutions à énergie positive

On écrit:

$$v = \lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u \tag{96}$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\epsilon + m_0} \tag{97}$$

Les solutions sont données par:

$$\psi = N \begin{pmatrix} u \\ \lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u \end{pmatrix} \tag{98}$$

où N est un facteur de normalisation. On suppose que les spineurs u et v ont été normalisés:

$$u^\dagger u = v^\dagger v = 1 \tag{99}$$

On peut alors normaliser ψ en écrivant $\psi^\dagger \psi = 1$:

$$|N|^2 \begin{pmatrix} u^\dagger & u^\dagger \lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u \end{pmatrix} = 1 \tag{100}$$

ce qui conduit à:

$$|N|^2 u^\dagger u \left[1 + \frac{p^2}{(m_0 + \epsilon)^2} \right] = 1 \tag{101}$$

$$|N|^2 = \frac{\epsilon + m_0}{2\epsilon} \tag{102}$$

La phase de N peut être choisie arbitrairement:

$$N = \left(\frac{\epsilon + m_0}{2\epsilon} \right)^{1/2} \tag{103}$$

Il y a une autre façon de normaliser les spineurs de Dirac, en écrivant $\overline{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = 1$. On trouve alors:

$$N = \left(\frac{\epsilon + m_0}{2m} \right)^{1/2} \tag{104}$$

Cette normalisation a un caractère invariant: elle est conservée par toute transformation de Lorentz. Elle ne peut pas être utilisée pour une particule de masse nulle.

3.3 Solutions à énergie négative

On écrit:

$$u = -\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})v \tag{105}$$

Les solutions sont données par:

$$\psi = N \begin{pmatrix} -\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})v \\ v \end{pmatrix} \tag{106}$$

Le facteur de normalisation se calcule comme précédemment, avec le même résultat.

3.4 Résultat

Les spineurs à deux composantes u et v sont de la forme:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{107}$$

On introduit les spineurs de base:

$$|\uparrow> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad |\downarrow> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{108}$$

qui représentent des particules avec leur spin orienté vers le haut et vers le bas, respectivement. Pour un spineur de Dirac on pourra encore utiliser cette façon de parler, en sachant bien qu'elle n'est pas rigoureuse. Elle devient valable si l'on passe à l'approximation non-relativiste, consistant à faire $\vec{p} \rightarrow 0$. Posons:

$$p_+ = p_x + ip_y \qquad \text{et} \qquad p_- = p_x - ip_y \tag{109}$$

On peut alors classer les solutions de la manière suivante (en omettant le facteur commun de normalisation):

$E > 0, \uparrow$	$E > 0, \downarrow$	$E < 0, \uparrow$	$E < 0, \downarrow$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ +\lambda p_z \\ +\lambda p_+ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +\lambda p_- \\ -\lambda p_z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\lambda p_z \\ -\lambda p_+ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\lambda p_- \\ +\lambda p_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On constate la présence de deux sortes de composantes pour ces spineurs. Les grandes composantes, qui sont de l'ordre de l'unité, et les petites composantes qui sont de l'ordre de $\lambda p \sim v/c$. Dans la limite non-relativiste les petites composantes tendent vers zéro et on retrouve les spineurs de Pauli avec deux composantes.

****

<u>Exercice</u>: Peut-on définir une parité pour un spineur de Dirac?

****

Cette considération nous permet aussi de classer les opérateurs en deux catégories. On verra plus tard que la plupart des opérateurs de Dirac se présentent sous la forme:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{110}$$

ou sous la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \tag{111}$$

Examinons les éléments de matrices, par exemple avec des solutions à énergie positive:

$$\begin{pmatrix} g^\dagger & p^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ p \end{pmatrix} = g^\dagger A g + p^\dagger B p \tag{112}$$

où g et p représentent les grandes et petites composantes. De même:

$$\begin{pmatrix} g^\dagger & p^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ p \end{pmatrix} = g^\dagger B p + p^\dagger A g \tag{113}$$

Le terme $g^\dagger A g$ est de l'ordre de l'unité, les termes $g^\dagger B p$ et $p^\dagger A g$ sont de l'ordre de v/c et le terms $p^\dagger B p$ est de l'ordre de $(v/c)^2$. Pour cette raison les opérateurs de la première catégorie sont appelés "opérateurs non-relativistes" et ceux de la deuxième catégorie "opérateurs relativistes".

La représentation particulière utilisée plus haut est intéressante lorsque l'on est proche de l'approximation non-relativiste. C'est le cas pour la radioactivité β car les nucléons dans les noyaux sont essentiellement non-relativistes.

****

<u>Exercice</u>: Quelle est la vitesse d'un nucléon dans un noyau? On demande seulement une évaluation grossière.

****

3.5 Une autre représentation particulière

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = -i\alpha_x\alpha_y\alpha_z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{114}$$

L'équation de Dirac s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{p}-E & m_0 \\ m_0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{115}$$

soit:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}-E)u + m_0 v = 0 \tag{116}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}+E)v - m_0 u = 0 \tag{117}$$

Cette représentation est intéressante lorsque $m_0 = 0$, et par extension pour une particule très rapide (approximation ultrarelativiste). Pour $m_0 = 0$ on observe un découplage des spineurs u et v:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u = Eu \tag{118}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})v = -Ev \tag{119}$$

Considérons par exemple des solutions à énergie positive ($E = +p$):

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p}\, u = +u \tag{120}$$

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p}\, v = -v \tag{121}$$

On définit l'opérateur "hélicité" h par:

$$h = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p} \tag{122}$$

On constate que les spineurs à deux composantes u et v sont des états propres de l'hélicité avec des valeurs propres $+1$ et -1, respectivement.

Pour une particule de masse nulle, on a deux états de base pour lesquels le spin est parallèle ou anti-parallèle à l'impulsion. Dans le premier cas, la particule est dite "droite", et dans le second, "gauche". On peut séparer ces deux états au moyen des opérateurs de projection:

$$a = \frac{1+\gamma^5}{2} \tag{123}$$

$$\overline{a} = \frac{1-\gamma^5}{2} \tag{124}$$

****

Exercice: Montrer que les opérateurs a et $\overline{a}$ ont les propriétés suivantes:

$$(a)^n = a \qquad (\overline{a})^n = \overline{a} \qquad a\overline{a} = \overline{a}a = 0 \qquad a + \overline{a} = 1 \tag{125}$$

En conclure que a et $\overline{a}$ sont des opérateurs de projection sur des états de "chiralité" droite et gauche, respectivement.
****

On obtient:

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\,\psi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \tag{126}$$

$$\frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{127}$$

On désigne par ψ_R et ψ_L les états de chiralités droite et gauche:

$$\psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\,\psi \qquad\qquad \psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi \tag{128}$$

****
Exercice: Démontrer les relations:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_R + \beta m_0\psi_L = E\psi_R \tag{129}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_L - \beta m_0\psi_R = -E\psi_L \tag{130}$$

Qu'observe-t-on pour $m_0 = 0$?
****

****
Exercice: Démontrer les relations

$$(\psi^c)_R = (\psi_L)^c \qquad\qquad (\psi^c)_L = (\psi_R)^c \tag{131}$$

On définit:

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\psi_R + (\psi_R)^c\Big] \qquad \text{et} \qquad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\psi_L + (\psi_L)^c\Big] \tag{132}$$

Montrer que les états χ_j sont auto-conjugués: $\chi_j = \chi_j^c$.
****

4 Termes de masse

D'une façon tout à fait générale, un terme de masse couple un état droit à un état gauche, ou vice-versa. Un terme de masse de Dirac est de la forme:

$$m_D(\overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_R) = m_D\overline{\psi}\psi \tag{133}$$

On peut l'interpréter en termes d'opérateurs comme représentant l'annihilation d'une particule (par exemple électron) et la création de la même particule. Ce terme de Dirac ne viole donc aucune loi de conservation (charge électrique, nombre leptonique, nombre baryonique, etc...).

Un terme de masse de Majorana est de la forme (deux possibilités):

$$m_1\left[\overline{(\psi_R)^c}\psi_R + \overline{\psi_R}(\psi_R)^c\right] + m_2\left[\overline{(\psi_L)^c}\psi_L + \overline{\psi_L}(\psi_L)^c\right] \tag{134}$$

Ce terme de Majorana correspondrait à l'annihilation d'une particule (par exemple électron) suivie de la création d'une antiparticule (positron). Il ne peut donc exister que pour une particule électriquement neutre, comme le neutrino, à condition qu'il n'existe pas une loi de conservation stricte du nombre leptonique (qui est alors violée avec $\Delta l = 2$).

Références

[1] Victor F. Weisskopf, *"Relativistic Quantum Mechanics"*, Lectures given at M.I.T. in 1953/54, Rapport CERN 62-15, 30 mars 1962.

Remis à jour le 13 janvier 1999