Chapitre 2

Le groupe de Lorentz et l'équation de Dirac

1 Importance des opérations de symétrie en physique

La connaissance des symétries attachées à un problème de physique simplifie considérablement la solution de ce problème. Ceci est déjà valable en mécanique classique. La connaissance des "intégrales premières" ou encore des "constantes du mouvement" est une étape importante vers la solution du problème. Ceci montre l'importance de la théorie des groupes en physique. Prenons comme exemple le problème de Képler, avec ses applications en astronomie et en physique atomique (atomes hydrogénoïdes). L'interaction est due à des forces centrales (dépendant seulement de la distance). On en déduit que le moment angulaire $\vec{L}$ est une constante du mouvement (trois constantes). Il y a en fait six constantes du mouvement:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{1}$$

$$\vec{K} = \vec{L} \times \vec{p} + mZ\alpha \, \frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

en plus de l'Hamiltonien:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Z\alpha}{r} \tag{3}$$

(on a utilisé ici les notations de la physique atomique).

****

<u>Exercice</u>: Démontrez que $\vec{L}$ et $\vec{K}$ sont des constantes du mouvement. Trouvez une relation entre K^2, L^2 et H.
Déterminez la trajectoire. Notez que vous n'avez pas eu besoin d'intégrer les équations du mouvement

****

La connaissance de ces constantes du mouvement conduit à une solution rapide du problème Or, les six constantes du mouvement sont les générateurs infinitésimaux du groupe $SO(4)$, groupe des rotations réelles dans un espace à quatre dimensions. L'invariance de l'hamiltonien du problème dans le groupe $SO(4)$ conduit directement à la solution du problème.

2 Le groupe de Lorentz

La relativité restreinte, un des piliers de la physique contemporaine, repose sur l'invariance de Lorentz. Une transformation de Lorentz est une transformation linéaire sur les coordonnées d'espace-temps qui laisse invariante la "distance" ds définie par:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{4}$$

En utilisant les coordonnées x^μ, la transformation linéaire la plus générale s'écrit:

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{5}$$

Ce sera une transformation de Lorentz si elle conserve le produit scalaire $\Delta x^\mu \Delta x_\mu$:

$$\Delta x'^\mu g_{\mu\nu} \Delta x'^\nu = \Delta x^\rho g_{\rho\sigma} \Delta x^\sigma \tag{6}$$

Ce qui donne:

$$a^\mu{}_\rho \Delta x^\rho g_{\mu\nu} a^\nu{}_\sigma \Delta x^\sigma = a^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} a^\nu{}_\sigma \Delta x^\rho \Delta x^\sigma = \Delta x^\rho g_{\rho\sigma} \Delta x^\sigma \tag{7}$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\left[a^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} a^\nu{}_\sigma - g_{\rho\sigma} \right] \Delta x^\rho \Delta x^\sigma = 0 \tag{8}$$

Ceci doit être vrai quel que soit $\Delta x^\rho \Delta x^\sigma$, donc:

$$a^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} a^{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{9}$$

ou en terme de matrices:

$$\tilde{a} g a = g \tag{10}$$

où $\tilde{a}$ est la matrice transposée de a.

Ceci impose une contrainte sur la matrice a. Par contre, le vecteur b est arbitraire, il est associé à une translation d'espace-temps (ou un changement de l'origine de l'espace et du temps):

$$x'^\mu = x^\mu + b^\mu \tag{11}$$

****
Exercice: Montrez que le produit de deux transformations de Lorentz est une transformation de Lorentz.
Expliquer pourquoi les transformations de Lorentz forment un groupe.
****

Le groupe des translations d'espace-temps est un sous-groupe du groupe de Lorentz. Si l'on fait abstraction de ces translations on passe du groupe de Lorentz "inhomogène":

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu} \tag{12}$$

au groupe de Lorentz "homogène":

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{13}$$

Voici quelques exemples:

- La matrice a est associée à une rotation dans l'espace-temps. Un cas particulier bien connu est une rotation d'espace, par exemple une rotation d'angle θ autour de Oz, soit $R_z(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Les transformations de Lorentz "spéciales", qui relient deux systèmes de référence animés d'un mouvement de translation réciproque de vitesse uniforme V. En posant $\tanh\phi = V/c$ une transformation suivant Oz s'écrit:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & 0 & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{15}$$

****

Exercice: Montrez que les deux transformations précédentes satisfont à la condition:

$$\tilde{a} g a = g \tag{16}$$

****

Ces deux dernières transformations sont caractérisées par des paramètres θ et ϕ qui peuvent varier de façon continue. On constate facilement que ces deux transformations sont représentées par des matrices dont le déterminant est égal à $+1$. Elles ont aussi un élément de matrice $a^{0}{}_{0}$ positif (celui qui relie ct à ct'). Le temps s'écoule dans le même sens dans les deux systèmes de référence. Ces deux transformations s'obtiennent de façon continue à partir de la transformation "identité". Il suffit de faire varier θ ou ϕ à partir de 0 jusqu'à la valeur choisie.

****

Exercice: Montrez que les rotations d'espace forment un groupe.
Les transformations de Lorentz "spéciales" forment-elles un groupe?

****

Il existe d'autres transformations de Lorentz, qui sont de nature discontinue. Ce sont des opérations qui changent les signes des coordonnées d'espace-temps.

- La parité: elle peut être définie de plusieurs façons.

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(symétrie par rapport au plan yOz)} \tag{17}$$

$$P_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(symétrie par rapport au plan zOx)} \tag{18}$$

$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(symétrie par rapport au plan xOy)} \tag{19}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(symétrie par rapport au point O)} \tag{20}$$

Ces transformations diffèrent entre elles par des rotations. Il est en effet possible, au moyen d'une rotation de $\theta = \pi$ de changer de signe deux éléments de matrices tels que $a^1{}_1$, $a^2{}_2$ et $a^3{}_3$. Elles sont caractérisées par un déterminant égal à -1 et un élément de matrice $a^0{}_0$ positif (le sens du temps est inchangé). On ne peut pas atteindre ces transformations par une variation continue de paramètres à partir de la transformation identité.

****

Montrez que $P_x P_y = P_y P_x = R_z(\pi)$, etc... Montrez que $P_x = P_y R_z(\pi) = R_z(\pi) P_y$, etc...

****

- Le renversement du temps:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(changement de } t \text{ en } -t\text{)} \tag{21}$$

Cette transformation a un déterminant -1 et un coefficient $a^0{}_0$ négatif. Il est impossible d'obtenir cette transformation par variation continue de paramètres à partir de la transformation identité, et pas davantage à partir des transformations P_x, P_y, P_z et P.

En effet on ne peut pas changer le signe de $\cosh \phi$ par une variation de ϕ. Il en résulte que les transformations identité, parité et renversement du temps appartiennent à des nappes distinctes non connexes. Les transformations telles que P_xT, P_yT, P_zT et PT qui ont un déterminant $+1$ et un élément de matrice ${a^0}_0$ négatif appartiennent à une quatrième nappe. En conclusion, le groupe de Lorentz homogène se compose de quatre nappes non connexes (Table 1):

Nappe	Déterminant	${a^0}_0$	Exemples
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	$+1$	> 0	I
$\mathcal{L}_-^\uparrow$	-1	> 0	P
$\mathcal{L}_+^\downarrow$	$+1$	< 0	PT
$\mathcal{L}_+^\downarrow$	-1	< 0	T

Table 1: La structure du groupe de Lorentz.

Seule la nappe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ consitue un groupe, appelé "sous-groupe propre orthochrone" du groupe de Lorentz.

3 L'équation de Dirac possède l'invariance de Lorentz

La transformation sur les coordonnées:

$$x'^\mu = {a^\mu}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{22}$$

a pour conséquence la transformation sur les dérivées:

$$\partial_\mu = \partial'_\nu {a^\nu}_\mu \tag{23}$$

****

Exercice: Démontrez cette propriété.

****

Donc:

$$(i\gamma^\mu \partial_\nu {a^\nu}_\mu - m_0)\psi = 0 \tag{24}$$

Les matrices $\gamma'^\nu = \gamma^\mu {a^\nu}_\mu$ ont les mêmes relations d'anticommutation que les matrices γ^μ.

****

Exercice: Démontrez cette propriété.

****

Il en résulte (voir propriétés générales des matrices γ^μ) qu'il existe une matrice S telle que:

$$\gamma^\mu {a^\nu}_\mu = S^{-1}\gamma^\nu S \tag{25}$$

Alors:

$$(iS^{-1}\gamma^\mu S\partial'_\mu - m_0)\psi = 0 \tag{26}$$

ou encore:

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m_0)S\psi = 0 \tag{27}$$

L'équation de Dirac a repris sa forme initiale, avec les mêmes matrices γ^μ, mais la solution est maintenant $S\psi$. La matrice S dépend de la transformation de Lorentz considérée. Ceci nous montre comment se transforme le spineur de Dirac dans une transformation de Lorentz.
****
Exercice: Démontrez la relation

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1} \tag{28}$$

****

La forme particulière de S pour une transformation de Lorentz donnée peut être déduite de la relation:

$$\gamma^\nu a^\mu{}_\nu = S^{-1}\gamma^\mu S \tag{29}$$

Il est facile de trouver l'expression de S pour une transformation infinitésimale, $a^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu, S = I + \eta$ ($\epsilon^\mu{}_\nu$ et η sont des infiniment petits).
****
<u>Exercice</u>: Montrez que $\epsilon^\mu{}_\nu + \epsilon_\nu{}^\mu = 0$
****

$$(I-\eta)\gamma^\mu(I-\eta) = (g^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu)\gamma^\nu \tag{30}$$

d'où:

$$\gamma^\mu\eta - \eta\gamma^\mu = \epsilon^\mu{}_\nu\gamma^\nu \qquad\qquad \text{avec } \mu \neq \nu \tag{31}$$

Il est facile de se convaincre que η doit être le produit de deux matrices γ. Après quelques calculs, on trouve:

$$\eta = \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \tag{32}$$

Pour une transformation finie:

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\,a_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \qquad\qquad \text{avec } \mu < \nu \tag{33}$$

Par exemple, pour une rotation d'espace (Equation 14) infinitésimale, le seul élément utile est:

$$a_{12} = \theta \tag{34}$$

On en déduit:

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\ \theta\gamma^1\gamma^2\right) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\ \sigma_z\right) = \cos\frac{\theta}{2}\ - i\sigma_z \sin\frac{\theta}{2} \tag{35}$$

Pour une rotation autour d'un axe quelconque (de vecteur unitaire $\vec{n}$:

$$S = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\right) = \cos\frac{\theta}{2}\ - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sin\frac{\theta}{2} \tag{36}$$

De même, pour une transformation de Lorentz spéciale (Equation 15) infinitésimale, le seul élément utile est:

$$a_{03} = \phi \tag{37}$$

On en déduit:

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\ \phi\gamma^0\gamma^3\right) = \exp\left(\frac{\phi}{2}\ \alpha_z\right) = \cosh\frac{\phi}{2}\ + \alpha_z \sinh\frac{\phi}{2} \tag{38}$$

Pour une transformation de Lorentz spéciale le long d'un axe quelconque (de vecteur unitaire $\vec{n}$):

$$S = \exp\left(\frac{\theta}{2}\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{n})\right) = \cosh\frac{\phi}{2} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{n})\sinh\frac{\phi}{2} \tag{39}$$

Ces matrices S forment une représentation du groupe de Lorentz:

$$S(L_1 \otimes L_2) = S(L_1) \times S(L_2) \tag{40}$$

****

Exercice:

1. On considère les matrices correspondant à deux rotations d'espace successives:

$$S_{\vec{n}_1}(\theta_1) = \cos\frac{\theta_1}{2}\ - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_1)\sin\frac{\theta_1}{2} \tag{41}$$

$$S_{\vec{n}_2}(\theta_2) = \cos\frac{\theta_2}{2}\ - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_2)\sin\frac{\theta_2}{2} \tag{42}$$

Calculez la matrice S correspondant au produit des deux rotations. Est-ce que cette matrice correspond à une rotation?

2. On considère les matrices correspondant à deux Lorentz spéciales successives:

$$S_{\vec{n}_1}(\phi_1) = \cosh\frac{\phi_1}{2} \; + (\vec{\alpha}\cdot\vec{n}_1)\sinh\frac{\phi_1}{2} \tag{43}$$

$$S_{\vec{n}_2}(\phi_2) = \cosh\frac{\theta_2}{2} \; + (\vec{\alpha}\cdot\vec{n}_2)\sinh\frac{\phi_2}{2} \tag{44}$$

Calculez la matrice S correspondant au produit des deux Lorentz spéciales. Est-ce que cette matrice correspond à une Lorentz spéciale?

Montrez que cette matrice correspond au produit d'une Lorentz spéciale et d'une rotation.

****

4 Les covariants S, V, T, A, P

Avec les spineurs et les 16 matrices de base on peut former les quantités suivantes (Table 2):

$\overline{\psi}I\phi$	S	Scalaire
$\overline{\psi}\gamma^\mu\phi$	V	Vecteur polaire
$\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\phi$	T	Tenseur antisymétrique
$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\phi$	A	Vecteur axial
$\overline{\psi}\gamma^5\phi$	P	Pseudoscalaire

Table 2: Les covariants de Lorentz

La définition générale de γ^5 est

$$\gamma^5 = i\;\frac{1}{!4}\;\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda \tag{45}$$

Il nous reste à justifier les diverses appellations (S, V, T, A, P). Pour celà nous devons étudier comment se comportent ces diverses quantités dans des transformations de Lorentz:

$$\psi' = S\psi \tag{46}$$

$$\overline{\psi}' = \overline{\psi}\gamma^0 S^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}S^{-1} \tag{47}$$

4.1 Scalaire

$$\overline{\psi}' I\phi' = \overline{\psi}S^{-1}IS\phi = \overline{\psi}I\phi \tag{48}$$

Cette quantité ne change pas. C'est un scalaire.

4.2 Vecteur

$$\overline{\psi}'\gamma^\mu\phi' = \overline{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\phi = a^\mu{}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu\phi \tag{49}$$

C'est la loi de transformation d'un vecteur.

4.3 Tenseur

Avec $\mu \neq \nu$:

$$\overline{\psi}'\gamma^\mu\gamma^\nu\phi' = \overline{\psi}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S\phi = a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\lambda\overline{\psi}\gamma^\rho\gamma^\lambda\phi \tag{50}$$

Et de même pour $\sigma^{\mu\nu}$.

C'est la loi de transformation d'un tenseur.

4.4 Pseudoscalaire

Traitons ce cas maintenant.

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\overline{\psi}'\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\phi' = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\overline{\psi}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\rho SS^{-1}\gamma^\lambda S\phi$$

$$= \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta a^\rho{}_\sigma a^\lambda{}_\tau\overline{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\sigma\gamma^\tau\phi \tag{51}$$

Rappelons la définition du déterminant:

$$\det(a) = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta a^\rho{}_\sigma a^\lambda{}_\tau\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} \tag{52}$$

et la relation:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta a^\rho{}_\sigma a^\lambda{}_\tau = \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\det(a) \tag{53}$$

d'où:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\overline{\psi}'\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\phi' = \det(a)\,\overline{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\sigma\gamma^\tau\phi\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \tag{54}$$

et par conséquent:

$$\overline{\psi}'\gamma^5\phi' = \det(a)\,\overline{\psi}\gamma^5\phi \tag{55}$$

C'est la loi de transformation d'un pseudoscalaire.

4.5 Vecteur axial (ou pseudovecteur)

$$\overline{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\phi' = \overline{\psi}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^5 S\phi = \det(a)\ a^\mu{}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\phi \tag{56}$$

C'est la loi de transformation d'un pseudovecteur.

Remis à jour le 13 janvier 1999.