Chapitre 4

La théorie $V - A$

1 De S, V, T, A, P à $V - A$

Suite aux suggestions de Lee et Yang, et aux expériences qui mirent en évidence la violation de P et C par les interactions faibles, il a fallu généraliser l'hamiltonien de ls désintégration β. En prenant la désintégration β^- comme exemple:

$$H_- = \sum_i g_i(\overline{\psi}_p O^i \psi_n)(\overline{\psi}_e O_i \psi_\nu) \tag{1}$$

où $i = S, V, T, A, P$.

Cet hamiltonien contient des termes du type $S \cdot S$, $V \cdot V$, etc... C'est donc un scalaire. Les observables calculées à partir de cet hamiltonien sont des scalaires. Or on observe également des observables pseudoscalaires.

L'hamiltonien

$$H'_- = \sum_i g'_i(\overline{\psi}_p O^i \psi_n)(\overline{\psi}_e O_i \gamma^5 \psi_\nu) \tag{2}$$

contient des termes du type $S \cdot P$, $V \cdot A$, etc... C'est donc un pseudoscalaire. Mais les observables calculées à partir de cet hamiltonien seront des scalaires, et seront même identiques à celles calculées à partir de l'hamiltonien H_-. La raison est que l'on élève l'élément de matrice au carré. Par contre, si l'on mélange les hamiltoniens H_- et H'_- on aura des observables scalaires et des observables pseudoscalaires. Soit donc l'hamiltonien

$$\mathcal{H}_- = H_- + H'_- = \sum_i (\overline{\psi}_p O^i \psi_n)\left[\overline{\psi}_e O_i (g_i + \gamma^5 g'_i)\psi_\nu\right] \tag{3}$$

On peut écrire, pour le terme qui précède ψ_ν:

$$g_i + g'_i\gamma^5 = (g_i + g'_i)\frac{1+\gamma^5}{2} + (g_i - g'_i)\frac{1-\gamma^5}{2} = g_i^R\ \frac{1+\gamma^5}{2} + g_i^L\ \frac{1-\gamma^5}{2} \tag{4}$$

Il représente l'annihilation d'un neutrino droit avec une amplitude $(g_i + g'_i) = g_i^R$ et l'annihilation d'un neutrino gauche avec l'amplitude $(g_i - g'_i) = g_i^L$. On comprend facilement que l'une de ces amplitudes doit être nulle pour que la parité soit violée de façon maximale, et l'on s'attend à ce que le neutrino soit droit ou gauche. Si l'on pouvait mesurer l'hélicité du neutrino, on saurait quelle amplitude il faut conserver.

L'hélicité du neutrino a été mesurée dans l'expérience de Goldhaber. On trouve que le neutrino a une hélicité gauche. On doit donc poser:

$$g_i' = -g_i \tag{5}$$

et le terme leptonique devient:

$$\overline{\psi}_e O_i \frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu \tag{6}$$

La mesure de la polarisation des électrons montre que ces derniers ont une hélicité gauche. Donc:

$$\psi_e = \frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_e \qquad\qquad \overline{\psi}_e = \overline{\psi}_e \frac{1+\gamma^5}{2} \tag{7}$$

****
Exercice: établir la seconde relation à partir de la première.
****

D'où le terme leptonique:

$$\overline{\psi}_e \frac{1+\gamma^5}{2}\ O_i\ \frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu \tag{8}$$

On peut aussi montrer que:

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\ O_i\ \frac{1-\gamma^5}{2}\ = 0 \qquad \text{pour} \quad i = S, T, P \tag{9}$$

ce qui résulte des relations de commutation des opérateurs avec γ^5.

On doit donc éliminer les interactions S, T et P. On peut réécrire l'hamiltonien (à une constante près):

$$\mathcal{H}^{(-)} = g_V(\overline{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)\left(\overline{\psi}_e\frac{1+\gamma^5}{2}\ \gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu\right)$$

$$+g_A(\overline{\psi}_p i\gamma^\mu\gamma^5\psi_n)\left(\overline{\psi}_e\frac{1+\gamma^5}{2}\ i\gamma_\mu\gamma^5\frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu\right)$$

$$= g_V(\overline{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)\left(\overline{\psi}_e\frac{1+\gamma^5}{2}\ \gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu\right) + g_A(\overline{\psi}_p\gamma^\mu\gamma^5\psi_n)\left(\overline{\psi}_e\frac{1+\gamma^5}{2}\ \gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu\right)$$

$$= \left(\overline{\psi}_p\gamma^\mu(g_V + g_A\gamma^5)\psi_n\right)\left(\overline{\psi}_e\frac{1+\gamma^5}{2}\ \gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\ \psi_\nu\right) \tag{10}$$

Si l'on pose $g_A = -g_V$ on peut écrire:

$$\mathcal{H}^{(-)} = g_V \left(\overline{\psi}_p \frac{1+\gamma^5}{2} \; \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \; \psi_n \right) \left(\overline{\psi}_e \frac{1+\gamma^5}{2} \; \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \; \psi_\nu \right) \tag{11}$$

En posant:

$$a = \frac{1-\gamma^5}{2} \tag{12}$$

$$\frac{1-\gamma^5}{2}\psi = a\psi \qquad \overline{\psi}\frac{1+\gamma^5}{2} = \overline{a\psi} \tag{13}$$

$$\mathcal{H}^{(-)} = g_V (\overline{a\psi}_p \gamma^\mu a\psi_n)(\overline{a\psi}_e \gamma_\mu a\psi_\nu) \tag{14}$$

On constate que cet hamiltonien est presque identique à l'hamiltonien proposé par Fermi. La seule différence est que les quatre fermions sont précédés de l'opérateur de projection a sur les états de chiralité gauche. Importante conclusion: les interactions faibles ne reconnaissent que les composantes gauches des fermions.

Afin de conserver la valeur de la constante de Fermi, on écrit:

$$\mathcal{H}^{(-)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \, (\overline{a\psi}_p \gamma^\mu a\psi_n)(\overline{a\psi}_e \gamma_\mu a\psi_\nu) \tag{15}$$

C'est la théorie $V - A$.

En fait, cette théorie ne peut s'appliquer que dans les contexte des interactions faibles à l'état pur. Mais les quatre fermions qui participent à l'interaction sont (à l'exception du neutrino) sujettes à d'autres interactions:

- électromagnétiques pour les particules chargées: électron, proton. Le neutron n'a pas de charge électrique mais il possède un moment magnétique.

- fortes pour les nucléons.

Les interactions fortes vont apporter des modifications importantes à la structure des interactions faibles semi-leptoniques (entre leptons et hadrons). Par exemple, la désintégration β, la capture des muons.

2 Les expériences fondamentales

On trouvera des descriptions de ces expériences dans le livre de H. Schopper, "Weak Interactions and Nuclear Beta Decay", North-Holland, 1966.

2.1 L'expérience de C.S. Wu

2.2 L'expérience de M. Goldhaber

****

Exercice:

1. Un noyau de masse M se trouve dans un état excité d'énergie E_0 par rapport à son état fondamental. Il est au repos dans le laboratoire. Il se désexcite par émission γ vers l'état fondamental. Calculer l'énergie E_1 du rayon γ émis. Faire une approximation pour $E_0 << M$.

2. Un noyau de masse M se trouve dans son état fondamental. Il est au repos dans le laboratoire. Un rayon γ l'excite vers son niveau excité d'énergie E_0. Calculer l'énergie E_2 de ce rayon γ.

3. Un rayon γ émis par un noyau excité (énergie E_0 peut-il exciter un autre noyau dans le même état (énergie E_0?

4. La largeur naturelle de l'état excité vous permet-elle de modifier la conclusion?

5. La température du laboratoire vous permet-elle de modifier la conclusion?

6. Quelle vitesse faudrait-il donner au noyau émetteur du rayon γ pour que ce dernier puisse exciter un autre noyau initialement au repos?

7. Cette situation existe-t-elle dans le cas du ^{152}Sm?

****

2.3 Les mesures de l'hélicité des électrons (positrons)

On trouvera des descriptions de ces expériences dans le livre de H. Schopper, "Weak Interactions and Nuclear Beta Decay", North-Holland, 1966.

3 La désintégration $\pi^+ \to e^+\nu$

La théorie $V - A$ fait une prédiction très intéressante pour le rapport d'embranchement:

$$R = \frac{\Gamma(\pi^+ \to e^+\nu)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu)} \tag{16}$$

****

Exercice: Calculez l'impulsion du muon émis dans la désintégration $\pi^+ \to \mu^+\nu$, puis l'impulsion du positron émis dans la désintégration $\pi^+ \to e^+\nu$.

Calculez le rapport d'embranchement:

$$R = \frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+\nu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu)} \tag{17}$$

en supposant qu'il est simplement donné par le rapport des volumes des espaces des phases. Faites le calcul numérique.
En réalité, le rapport R est de l'ordre de 10^{-4}. Pourquoi?
****

Comment écrire un élément de matrice pour la désintégration $\pi^+ \rightarrow l^+\nu$? On a une transition entre un état hadronique $|\pi^+\rangle$ et le vide hadronique. L'élément leptonique est connu sans ambigu¨é. Il contient une partie vectorielle et une partie vectorielle axiale. Pour satisfaire à l'invariance de Lorentz la partie hadronique devra aussi contenir une partie vectorielle et une partie vectorielle axiale. D'où l'élément de matrice:

$$M = \langle 0|V_\mu + A_\mu|\pi^+\rangle \left[\overline{\psi}_\nu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\psi_l\right] \tag{18}$$

La seule variable que intervient dans le problème est le quadrivecteur impulsion énergie du pion, P_μ et c'est un vecteur polaire. On doit donc pouvoir écrire:

$$\langle 0|V_\mu + A_\mu|\pi^+\rangle = f_\pi P_\mu \tag{19}$$

Mais le pion est un méson pseudoscalaire (sa parité intrinsèque par rapport au vide est négative. Il en résulte que le terme $\langle 0|V_\mu|\pi^+\rangle$ est un vecteur axial et doit donc être identiquement nul. Seul le courant hadronique A_μ peut contribuer à la désintégration du pion.
****
<u>Exercice</u>: Pourquoi la parité du pion est-elle négative? Quelles sont les preuves expérimentales?
****

On trouve:

$$M = f_\pi P_\mu \left[\overline{\psi}_\nu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\psi_l\right]$$

$$= f_\pi \left[\overline{\psi}_\nu \gamma^\mu P_\mu (1-\gamma^5)\psi_l\right]$$

$$= f_\pi \left[\overline{\psi}_\nu \gamma^\mu (p_\mu + q_\mu)(1-\gamma^5)\psi_l\right]$$

où p_μ est le quadrivecteur impulsion-énergie du lepton chargé et q_μ celui du neutrino. En utilisant l'équation de Dirac:

$$\overline{\psi}_\nu \gamma^\mu q_\mu = 0 \tag{20}$$

et:

$$\gamma^{\mu} p_{\mu} \psi_l = m_l \tag{21}$$

D'où:

$$= f_{\pi} m_l \left[\overline{\psi}_{\nu} (1 - \gamma^5) \psi_l \right]$$

L'élément de matrice est proportionnel à la masse du lepton. On en déduit que le rapport d'embranchement R est donné par:

$$R = \frac{(m_{\pi}^2 - m_e^2)^2}{(m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)^2} \, \frac{m_e^2}{m_{\mu}^2} \tag{22}$$

On a donc un "facteur de suppression" donné par le rapport des carrés des masses. Un tel facteur de suppression est caractéristique des interaction V et A et n'existe pas pour les autres interactions S, T et P. Il faut noter que cette conclusion est valable pour tout mélange des couplages V et A (par exemple $V - A$, $V + A$, mais aussi V, A). Le rapport R n'est pas un test de la théorie $V - A$ mais plutôt un test d'exclusion des couplages autres que V et A.

****

Exercice: Pour obtenir le résultat précédent on a dû faire une hypothèse additionnelle. Laquelle?

****

L'expérience a été réalisée au CERN en 1958. Le résultat était en accord avec la prédiction théorique. Par la suite des mesures plus précises du rapport R on permis de mettre des bornes supérieures à la présence des autres interactions possibles.

4 L'interaction universelle de Fermi

Une étape vers l'unification a été la suggestion que c'est la même interaction qui est responsable de:

- la désintégration du muon, $\mu \to e\nu\nu$.
- la désintégration β, (β^-, β^+), la capture d'électron orbital.
- la capture des muons, $\mu^-(A, Z) \to \nu(A, Z - 1)$.

Cette hypothèse de l'interaction universelle de Fermi a été vérifiée par des expériences de plus en plus précises.

5 La désintégration du muon

La désintégration du muon offre un moyen de mettre la théorie $V - A$ à l'épreuve car c'est un processus leptonique. L'interaction faible agit presque à l'état pur: les interactions fortes sont absentes. Il y a des corrections dues à l'interaction électromagnétique, mais elles sont petites et on peut les calculer avec confiance.

La forme la plus générale de l'hamiltonien décrivant la désintégration du muon a été utilisée par Louis Michel[1]. Les seules hypothèses sont celles d'une interaction locale, invaariante de Lorentz, sans couplages dérivatifs, conservant les saveurs leptoniques. À basse énergie on peut utiliser comme limite une interaction ponctuelle de quatre fermions:

$$M = 4\,\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i=S,V,T} \sum_{h_1,h_2=R,L} g^i_{h_1 h_2} \langle \bar{e}_{h_1} | O^i | (\nu_e)_{h'_1} \rangle \langle \overline{\nu_\mu}_{h'_2} | O_i | \mu_{h_2} \rangle \tag{23}$$

Les opérateurs O^i sont donnés en table 1.

i	Opérateur
S	1
V	γ^μ
T	$\sigma^{\mu\nu}$

Table 1: Les opérateurs pour la désintégration du muon.

Les constantes de couplage qui interviennent sont données en table 2.

g^S_{RR}	g^S_{RL}	g^S_{LR}	g^S_{LL}
g^V_{RR}	g^V_{RL}	g^V_{LR}	g^V_{LL}
	g^S_{RL}	g^S_{LR}	

Table 2: Les constantes de couplage pour la désintégration du muon ou du tauon.

Elles sont normalisées de la façon suivante:

$$\frac{1}{4}\left(|g^S_{RR}|^2 + |g^S_{RL}|^2 + |g^S_{LR} + |g^S_{LL}|^2 \right) + |g^V_{RR}|^2 + |g^V_{RL}|^2 + |g^V_{LR}|^2 + |g^V_{LL}|^2 \tag{24}$$

$$+3\left(|g^T_{RL}|^2 + |g^T_{LR}|^2 \right) = 1 \tag{25}$$

Dans le cas le plus général ces dix constantes peuvent être complexes. Il y a donc au total 19 paramètres à déterminer expérimentalement (après élimination d'une phase globale non physique). Le modèle standard correspond à $g^V_{LL} = 1$ et toutes les autres constantes de couplage nulles.

On peut introduire les combinaisons suivantes qui correspondent aux quatre combinaisons possibles des hélicités du muon et du positron (Table 3).

Combinaison	Positron	Muon
$Q_{RR} = \frac{1}{4}\lvert g^S_{RR}\rvert^2 + \lvert g^V_{RR}\rvert^2$	Droit	Droit
$Q_{RL} = \frac{1}{4}\lvert g^S_{RL}\rvert^2 + \lvert g^V_{RL}\rvert^2 + 3\lvert g^T_{RL}\rvert^2$	Droit	Gauche
$Q_{LR} = \frac{1}{4}\lvert g^S_{LR}\rvert^2 + \lvert g^V_{LR}\rvert^2 + 3\lvert g^T_{LR}\rvert^2$	Gauche	Droit
$Q_{LL} = \frac{1}{4}\lvert g^S_{LL}\rvert^2 + \lvert g^V_{LL}\rvert^2$	Gauche	Gauche

Table 3: Probabilités pour diverses hélicités du positron et du muon.

5.1 L'expérience

Une analyse de la situation expérimentale a été faite dans le cas de la désintégration du muon, indépendamment de tout modèle théorique. Pour déterminer complétement l'interaction à partir du secteur leptonique seulement il faut faire cinq expériences:

- une mesure de la vie moyenne τ_μ.
- une mesure du paramètre d'asymétrie ξ.
- une mesure du paramètre d'asymétrie δ.
- une mesure de l'hélicité des électrons (ou positrons).
- une mesure du taux de réaction $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$.

Il est clair, cependant, que toute mesure additionnelle peut se révéler utile, en ajoutant des contraintes supplémentaires. La raison pour laquelle cinq expériences suffisent est que certaines données expérimentales sont très contraingnantes. C'est le cas de l'hélicité de l'électron (positron) ξ'. Dans le cas du positron on a:

$$Q_{RR} + Q_{RL} = \frac{1}{4}\left(|g^S_{RR}|^2 + |g^S_{RL}|^2\right) + |g^V_{RR}|^2 + |g^V_{RL}|^2 + 3|g^T_{RL}|^2 = \frac{1}{2}(1-\xi') \tag{26}$$

Si l'on trouve la valeur du modèle standard, $\xi' = 1$, on élimine d'un seul coup cinq constantes de couplage.

De la même façon une mesure des paramètres d'asymétrie ξ et δ imposent des contraintes très fortes:

$$Q_{LR} + Q_{RR} = \frac{1}{4}\left(|g^S_{RR}|^2 + |g^S_{LR}|^2\right) + |g^V_{RR}|^2 + |g^V_{LR}|^2 + 3|g^T_{LR}|^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{9}\xi(3 - 16\delta)\right] \tag{27}$$

Si l'on trouve les valeurs du modèle standard $\xi = 1, \delta = 3/4$, on élimine d'un seul coup cinq constantes de couplage.

Par contre d'autres mesures sont moins efficaces. C'est le cas des paramètres ρ et η.

$$1 - \frac{4}{3}\rho = \left[|g^V_{LR}|^2 + |g^V_{RL}|^2 + 2|g^T_{LR}|^2 + 2|g^T_{RL}|^2 + Re(g^S_{LR} g^{T*}_{LR} + g^S_{RL} g^{T*}_{RL}) \right] \tag{28}$$

$$2\ \eta = Re(6 g^V_{RL} g^{T*}_{LR} + 6 g^V_{LR} g^{T*}_{RL} + g^S_{RR} g^{V*}_{LL} + g^S_{RL} g^{V*}_{LR} + g^S_{LR} g^{V*}_{RL} + g^S_{LL} g^{V*}_{RR}) \tag{29}$$

On constate que le fait de trouver expérimentalement $\rho = 3/4$ ne confirme pas pour autant le couplage $V - A$. En effet on trouve:

$$-Re(g^S_{LR} g^{T*}_{LR} + g^S_{RL} g^{T*}_{RL}) = |g^V_{LR}|^2 + |g^V_{RL}|^2 + 2|g^T_{LR}|^2 + 2|g^T_{RL}|^2 \tag{30}$$

Les constantes g^S_{LL}, g^S_{LR}, g^S_{RL}, g^S_{RR}, g^V_{LL} et g^V_{RR} peuvent prendre des valeurs arbitraires pourvu que les constantes tensorielles soient nulles ainsi que g^V_{LR} et g^V_{RL}. Par exemple une interaction V + A ne peut pas être exclue.

Références

[1] L. Michel, Proc. Phys. Soc. **A63**, 514, 1950; corrigendum **A63**, 1371, 1950.

6 Appendice A: La matrice de Fierz

Cette matrice exprime l'invariance de l'hamiltonien d'interaction de quatre fermions dans la permutation de ces derniers. On part de l'hamiltonien:

$$H = \sum_i g_i (\overline{u}_1 O^i u_2)(\overline{u}_3 O_i u_4) \qquad (i = S, V, T, A, P) \tag{31}$$

et on aboutit à:

$$H = \sum_i \tilde{g}_i (\overline{u}_1 O^i u_4)(\overline{u}_3 O_i u_2) \tag{32}$$

Les $\tilde{g}_i$ sont reliés aux g_i par la matrice de Fierz:

$$\tilde{g}_i = F^j_i g_j \tag{33}$$

avec la matrice:

$$F = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Attention: vous trouverez peut-être une expression différente de cette matrice dans la littérature. Il y a en effet plusieurs conventions possibles.

****

Exercice: trouver les valeurs propres de cette matrice ainsi que les vecteurs propres.
Conclusion: quelles sont les interactions qui sont invariantes dans la transformation de Fierz?
****