Chapitre 8

Les théories de jauge
Le Modèle Standard
des interactions électrofaibles

1 Invariance de jauge

L'équation de Dirac est manifestement invariante dans la transformation

$$\psi(x^\mu) \to \psi'(x^\mu) = \exp(ig\alpha)\psi(x^\mu) \tag{1}$$

où g est une constante (constante de couplage) et α est indépendant des x^μ. La transformation précédente est une transformation de jauge "globale". Contrairement aux apparences, une telle invariance n'est pas triviale. Suivant le théorème de Noether elle a pour conséquence l'existence d'un courant conservé.

Que se passe-t-il si maintenant α est fonction des x^μ (transformation de jauge "locale")? Il est clair que l'équation de Dirac n'est plus invariante, à cause du terme dérivatif $\partial_\mu\alpha$. On peut rétablir l'invariance en introduisant la dérivée "covariante":

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{2}$$

où A_μ est fonction des x_μ. Il suffit de demander que $D_\mu\psi$ se transforme de la même façon que ψ:

$$D'_\mu\psi' = \exp(ig\alpha)D_\mu\psi \tag{3}$$

$$D'_\mu\psi' = (\partial_\mu - igA'_\mu)\exp(ig\alpha)\psi = \exp(ig\alpha)(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \tag{4}$$

ce qui donne:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha \tag{5}$$

En résumé, l'équation de Dirac:

$$\Big[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m\Big]\psi = 0 \tag{6}$$

est invariante dans la tranformation de jauge locale:

$$\psi \to \psi' = \exp(ig\alpha)\psi \qquad\qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \tag{7}$$

Mais ce n'est plus l'équation d'une particule libre. La particule est en interaction avec un champ A_μ qui en fait est le champ électromagnétique, ainsi qu'on peut le montrer facilement. La constante de couplage g est simplement la charge électrique.
On définit le tenseur antisymétrique:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8}$$

****

Exercice: montrer que $F_{\mu\nu}$ est invariant de jauge. Identifier les diverses composantes de $F_{\mu\nu}$ avec les composantes des champs électrique et magnétique.

****

On peut alors construire le Lagrangien:

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \overline{\psi}\Big[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m\Big]\psi \tag{9}$$

Le premier terme décrit le champ électromagnétique pur et le second décrit l'électron en interaction avec le champ. En utilisant le calcul des variations on arrive aux équations de Maxwell et à l'équation de Dirac.
Notons l'absence d'un terme de la forme $A^\mu A_\mu$ qui n'est pas invariant de jauge. Un terme de ce genre devrait être précédé d'un coefficient ayant la dimension d'une masse au carré. Cette masse ne pourrait être que celle du photon. On peut donc relier la masse nulle du photon à la nécessité de préserver l'invariance de jauge.

****

Exercice: utiliser les équations de Lagrange:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) = \frac{\partial L}{\partial \psi} \qquad \text{et} \qquad \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_\nu} \tag{10}$$

pour obtenir les équations de Maxwell et l'équation de Dirac. On montrera aussi que:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{11}$$

****

Le grand avantage de l'Électro-Dynamique Quantique (EDQ) est son caractère renormalisable, qui permet d'effectuer des calculs non-ambigus à tous les ordres de perturbations. Nous verrons que cet avantage peut être étendu aux théories de jauge non-abéliennes à symétrie spontanément brisée.

2 Théories de jauge non-abéliennes

Les résultats précédents relatifs à l'électromagnétisme, une théorie de jauge construite sur le groupe abélien U(1), peuvent être généralisés dans le cas de groupes non abéliens. Soit une transformation de jauge G telle que:

$$\psi \to \psi' = G\psi \tag{12}$$

$$D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = G(D_\mu\psi) \tag{13}$$

en développant cette dernière équation, on trouve pour le potentiel A_μ:

$$A_\mu \to A'_\mu = GA_\mu G^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial_\mu G)G^{-1} = GA_\mu G^{-1} - \frac{1}{ig}G(\partial_\mu G^{-1}) \tag{14}$$

Définissons le tenseur $F_{\mu\nu}$ par la relation:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = -igF_{\mu\nu}\psi \tag{15}$$

Après quelques calculs on trouve:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{16}$$

où l'on note maintenant la présence du commutateur $[A_\mu, A_\nu]$.
À partir de la définition de $F_{\mu\nu}$ on démontre facilement que:

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = GF_{\mu\nu}G^{-1} \tag{17}$$

****

Exercice: montrer que

$$\text{Trace } [F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}] = \text{ Trace } [F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \tag{18}$$

****

Il en résulte que la quantité Trace $[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]$ est invariante de jauge.
Comme exemple, considérons la Chromo-Dynamique Quantique (CDQ), théorie de jauge construite sur le groupe $SU(3)_C$ de la couleur. La transformation de jauge sur un fermion (quark coloré) s'écrit:

$$\psi \to \psi' = \exp(igf_k\alpha^k)\psi \qquad (k = 1, 8) \tag{19}$$

avec:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_V \end{pmatrix} \tag{20}$$

(avec R pour rouge, B pour bleu et V pour vert).

La somme sur k s'étend aux huit générateurs infinitésimaux du groupe $SU(3)$. Ces f_k ont une représentation matricielle (3×3) qui est donnée dans la littérature (voir par exemple Cheng et Li, "Gauge theories of elementary particle physics")

La dérivée covariante s'écrit:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \qquad \text{avec} \qquad A_\mu = f_k A^k_\mu \tag{21}$$

et le champ de jauge:

$$F_{\mu\nu} = f_k F^k_{\mu\nu} \qquad \text{avec} \qquad F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu - gC^k_{lm} A^l_\mu A^m_\nu \tag{22}$$

où les C^k_{lm} sont les constantes de structure du groupe, définies par:

$$[f_l, f_m] = iC^k_{lm} f_k \tag{23}$$

****

<u>Exercice</u>: montrer que

$$\text{Trace } [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = F^{\mu\nu k} F^k_{\mu\nu} \tag{24}$$

On utilisera la relation de normalisation des f_k:

$$\text{Trace } [f_k f_l] = \delta_{kl} \tag{25}$$

****

On peut maintenant écrire le Lagrangien de la CDQ:

$$L = -\frac{1}{4}\text{Trace } [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] - \sum_{q=1}^{N} \overline{\psi_q} \Big[i\gamma_\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m_q \Big] \psi_q \tag{26}$$

La somme est étendue à toutes les saveurs de quarks (N).

La CDQ est une théorie de jauge exacte. Les gluons, bosons associés aux générateurs infinitésimaux du groupe, sont de masse nulle.

Notons ici une différence importante entre l'électromagnétisme et les théories de jauge non abéliennes. En électromagnétisme, le tenseur $F_{\mu\nu}$ est linéaire par rapport au potentiel A_μ. Le Lagrangien contient donc seulement un terme en A^2. Dans une théorie de jauge non- abélienne le Lagrangien contient des termes en A^2, A^3 et A^4. Ceci a une conséquence importante: alors que deux photons ne peuvent pas interagir de façon directe (les photons sont neutres et pour interagir ils doivent se matérialiser en paires électron-positron) les gluons (qui sont colorés) peuvent interagir directement (graphes à trois et à quatre gluons). Ceci rend la physique de la CDQ différente de celle de l'EDQ.

3 Le mécanisme de Higgs

Pendant longtemps on a cru qu'il était impossible de construire une théorie de jauge pour les interactions faibles. En effet, une théorie de jauge exacte suppose des bosons de masse nulle. Cependant, l'interaction faible, avec sa courte portée ($\sim 10^{-16}$ cm), exige des bosons massifs (masses de l'ordre de 100 GeV). Un pas en avant a été fait avec les théories de jauge spontanément brisées. Il est en effet possible de briser la symétrie d'une façon telle que la théorie reste renormalisable.

Pour comprendre le mécanisme de Higgs, nous allons considérer un cas simple, celui de l'électromagnétisme. Nous allons nous livrer à un exercice quelque peu académique, consistant à donner une masse au photon[1]. Pour cela introduisons un nouveau secteur de particules, constitué par un boson scalaire complexe de masse nulle $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Nous écrivons alors le Lagrangien (invariant de jauge):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) + \mu^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2 \tag{27}$$

Nous reconnaissons le Lagrangien du champ électromagnétique et celui d'un boson de masse nulle dans lequel figure la dérivée covariante. Les deux derniers termes constituent le potentiel $-V$ qui est requis pour obtenir le résultat souhaité. Si μ^2 et λ sont positifs le potentiel $V(x)$ passe par un maximum pour $x = 0$ et un minimum pour $\phi = (\mu^2/2\lambda)^{1/2}\exp(i\omega)$, ou ω est un angle arbitraire. La symétrie du problème se traduit par le fait que toutes les valeurs de ω sont a priori possibles. Pourtant, la nature choisira une position d'équilibre, donc une valeur particulière de ω. Il y aura brisure spontanée de la symétrie: le Lagrangien est symétrique mais la solution physique ne respecte pas cette symétrie. Mettons alors ϕ sous la forme:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + v)\exp(ig\theta/v) \tag{28}$$

avec $v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}$ et deux nouveaux champs réels η et θ. La position d'équilibre correspond à $\eta = \theta = 0$. Faisons maintenant une transformation de jauge:

$$\phi \rightarrow \phi' = \exp(-ig\theta/v)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + v) \tag{29}$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{v}\partial_\mu\theta \tag{30}$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \tag{31}$$

$$D_\mu\phi \rightarrow D'_\mu\phi' = \exp(-ig\theta/v)(D_\mu\phi) \tag{32}$$

et écrivons l'expression du Lagrangien dans la nouvelle jauge:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\partial^\mu\eta + igA'^\mu(\eta + v)\right]\left[\partial_\mu\eta - igA'_\mu(\eta + v)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\mu^2(\eta+v)^2 - \frac{1}{2}\lambda(\eta+v)^4 \qquad (33)$$

$$= -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(gv)^2 A'^{\mu}A'_{\mu} + \frac{1}{2}(\partial^\mu\eta)^2 - \mu^2\eta^2 + ... \qquad (34)$$

Le terme en θ a disparu. Le photon a acquis une masse $m_A = (gv)$ et on a un boson scalaire η de masse $m_\eta = \mu\sqrt{2}$. Le nombre de degrés de liberté n'a pas changé: au début, un photon de masse nulle avec deux états de polarisation et deux champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2; à la fin, un photon massif avec trois degrés de polarisation et un champ scalaire réel. Tout se passe comme si le photon avait absorbé un boson scalaire pour recupérer un état de polarisation et devenir massif. C'est le mécanisme de Higgs, que nous allons utiliser dans le cas de la théorie électrofaible construite sur le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$.

Les théories de jauge avec symétrie spontanément brisée sont devenues très populaires lorsque t'Hooft a montré qu'elles pouvaient être renormalisées.

4 Les interactions électrofaibles

4.1 Le choix du groupe de jauge

Il est possible de construire une théorie de jauge renormalisable qui décrit simultanément les interactions faibles et l'interaction électromagnétique. Cette théorie est construite sur le produit de deux groupes $SU(2) \otimes U(1)$. Une transformation de jauge est définie de la façon suivante:

$$\phi \to \phi' = \exp\left(igI_k\alpha^k + ig'\frac{1}{2}Y\alpha^0\right)\phi \qquad (35)$$

Les I_k sont les composantes de l'isospin faible (partie SU(2)) et sont proportionnelles aux matrices de Pauli: $I_k = \tau_k/2$. Y est l'hypercharge faible (partie U(1)). La charge électrique est donnée par $Q = I_3 + Y/2$.

Il faut maintenant introduire les particules et leur attribuer des nombres quantiques d'isospin faible et d'hypercharge faible. Ces particules constituent deux secteurs différents. Le secteur fermionique comprend les leptons et les quarks. Le secteur de Higgs comprend les bosons scalaires nécessaires pour donner de la masse aux bosons de jauge. Les attributions de nombres quantiques sont faites en vue de retrouver la physique connue: violation maximale de la parité dans les courants faibles chargés, masse nulle du neutrino (jusqu'à preuve du contraire). La théorie qui va être exposée a reçu le nom de “Modèle Standard”. Elle s'applique à une génération de quarks et de leptons. Nous verrons par la suite comment étendre le modèle à plusieurs générations. Les attributions de nombres quantiques sont données dans la Table 1: La dissymétrie entre les composantes droite et gauche des fermions (composantes droites dans des doublets, composantes droites dans les singulets) est destinée à reproduire la violation maximale de la parité dans les courants faibles chargés. Remarquons aussi l'absence de neutrino droit: on n'en a pas besoin. L'absence de neutrino droit exclut tout terme de masse de Dirac pour le neutrino.

	I	I_3	Y	Q
ν_{eL}	$1/2$	$+1/2$	-1	0
e^-_L	$1/2$	$-1/2$	-1	-1
e^-_R	0	0	-2	-1
u_L	$1/2$	$+1/2$	$1/3$	$+2/3$
d_L	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	$-1/3$
u_R	0	0	$4/3$	$+2/3$
d_R	0	0	$-2/3$	$-1/3$
ϕ^+	$1/2$	$+1/2$	$+1$	$+1$
ϕ^0	$1/2$	$-1/2$	$+1$	0

Table 1: Isospin et hypercharge pour le secteur fermionique et le secteur de Higgs

4.2 Le Lagrangien

Le Lagrangien contiendra d'abord les termes associés aux bosons de jauge. Il y a quatre bosons de jauge, correspondant aux quatre générateurs infinitésimaux (trois pour $SU(2)$, W_k^μ et un pour $U(1)$, B^μ):

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}\text{Trace }[W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}] - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \tag{36}$$

avec:

$$W_k^{\mu\nu} = \partial^\mu W_k^\nu - \partial^\nu W_k^\mu - g\epsilon_k^{lm} W_l^\mu W_m^\nu \tag{37}$$

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B_\nu - \partial^\nu B_\mu \tag{38}$$

Ensuite nous trouverons les fermions en interaction avec les bosons de jauge:

$$\mathcal{L}_{F-G} = -\sum_F \overline{\psi_F}\gamma^\mu D_\mu \psi_F \tag{39}$$

avec:

$$D_\mu = \partial_\mu - igI_k W_\mu^k - ig'\frac{1}{2}YB_\mu \tag{40}$$

Remarquons l'absence du terme de masse, qui viole l'invariance $SU(2)\otimes U(1)$ puisque les composantes gauches sont dans des doublets et les composantes droites dans des singulets. Les masses seront générées lors de la brisure de la symétrie.

Pour obtenir cette brisure de symétrie il nous faut introduire le secteur de Higgs en interaction avec les bosons de jauge:

$$\mathcal{L}_{H-G} = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) \tag{41}$$

et le potentiel de Higgs:

$$\mathcal{L}_H = \mu^2(\phi^\dagger\phi) - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{42}$$

Enfin, il faudra ajouter des termes de couplage entre bosons scalaires et fermions en vue de donner de la masse à ces derniers.

4.3 Bosons de jauge massifs

Le mécanisme de Higgs s'applique. On met ϕ sous la forme:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \exp\left(ig\frac{1}{2}\tau^k\theta_k/v\right) \tag{43}$$

Les trois états décrits par les θ_k seront absorbés par trois bosons de jauge qui deviendront massifs, et il restera un boson massif η observable physiquement (boson de Higgs).
Développons ϕ autour de la position d'équilibre

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{44}$$

Considérons le terme:

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = \phi^\dagger\left[\partial^\mu + ig\frac{1}{2}\tau_k W^{\mu k} + ig'\frac{1}{2}YB^\mu\right]\left[\partial_\mu - ig\frac{1}{2}\tau_k W^k_\mu - ig'\frac{1}{2}YB_\mu\right]\phi \tag{45}$$

avec $Y = +1$.
On est conduit à examiner l'expression:

$$(g\tau_k W^k_\mu + g'B_\mu)\phi = \begin{pmatrix} gW^3_\mu + g'B_\mu & g(W^1_\mu - iW^2_\mu) \\ g(W^1_\mu + iW^2_\mu) & -gW^3_\mu + g'B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} vg(W^1_\mu + iW^2_\mu) \\ v(-gW^3_\mu + g'B_\mu) \end{pmatrix} \tag{46}$$

Le terme en $(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)$ donne:

$$(vg)^2(W^{\mu 1}W^1_\mu + W^{\mu 2}W^2_\mu) + v^2(-gW^{\mu 3} + g'B^\mu)(-gW^3_\mu + g'B_\mu) \tag{47}$$

C'est un terme de masse. Il faut le mettre sous forme diagonale, et pour cela effectuer la transformation:

$$W^3_\mu = Z_\mu \cos\theta_W + A_\mu \sin\theta_W \tag{48}$$

$$B_\mu = -Z_\mu \sin\theta_W + A_\mu \cos\theta_W \tag{49}$$

Nous voulons que le photon reste sans masse, donc il faut annuler le coefficient du terme en $A^\mu A_\mu$, ce qui donne:

$$g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W \tag{50}$$

Reste le terme en $Z^\mu Z_\mu$:

$$v^2(-g\cos\theta_W - g'\sin\theta_W)^2 Z^\mu Z_\mu = \frac{(vg)^2}{\cos^2\theta_W} Z^\mu Z_\mu \tag{51}$$

On constate la présence de termes de masses correspondant à deux bosons chargés $W^\pm$ et un boson neutre Z^0, avec les masses:

$$M_W = \frac{1}{2} vg \qquad \text{et} \qquad M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \tag{52}$$

4.4 Interactions Fermions-Bosons de jauge

Cette interaction est contenue dans le terme:

$$\overline{\psi_F}\gamma^\mu D_\mu \psi_F = \overline{\psi_F}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igI_k W_\mu^k - ig'\frac{1}{2} Y B_\mu\right)\psi_F \tag{53}$$

Considérons les termes diagonaux (matrice unité et matrice I_3):

$$gI_3(Z_\mu \cos\theta_W + A_\mu \sin\theta_W) + g'\frac{1}{2}Y(-Z_\mu \sin\theta_W + A_\mu \cos\theta_W) \tag{54}$$

$$= \frac{g}{\cos\theta_W}(I_3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu + gQ\sin\theta_W A_\mu \tag{55}$$

D'où le Lagrangien d'interaction pour courants neutres:

$$L_{NC} = \frac{g}{\cos\theta_W}(J_F^{(3)\mu} - J_F^{(EM)\mu}\sin^2\theta_W)Z_\mu + g\sin\theta_W J_F^{(EM)\mu} A_\mu \tag{56}$$

Le second terme reproduit l'interaction électromagnétique à condition de poser:

$$g\sin\theta_W = e \tag{57}$$

Le premier terme est un courant faible neutre dont la structure est parfaitement définie dans le modèle et qui se prête donc à des vérifications expérimentales. Les courants chargés se déduisent facilement du terme:

$$g(I_1 W_\mu^1 + I_2 W_\mu^2) = g(I^{(+)} W_\mu^- + I^{(-)} W_\mu^+) \tag{58}$$

En résumé:

$$gJ_F^{(+)\mu} W_\mu^- \tag{59}$$

	γ^μ	$\gamma^\mu\gamma^5$
Fermion	$I_3 - 2Q\sin^2\theta_W$	$-I_3$
ν_e	$+1/2$	$-1/2$
e^-	$-1/2 + 2\sin^2\theta_W$	$+1/2$
u	$+1/2 - 4/3\sin^2\theta_W$	$-1/2$
d	$-1/2 + 2/3\sin^2\theta_W$	$+1/2$

Table 2: Couplage des fermions avec le boson Z^0

$$\frac{g}{\cos\theta_W}(J_F^{(3)\mu} - J_F^{(EM)\mu}\sin^2\theta_W)Z_\mu + eJ_F^{(EM)\mu}A_\mu \tag{60}$$

$$gJ_F^{(-)\mu}W_\mu^+ \tag{61}$$

Explicitons la structure du courant faible neutre en sommant sur les composantes droite et gauche des fermions (en se rappelant que l'isospin est égal à zéro pour les composantes droites):

$$\overline{\psi_F}\left[\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^\mu(I_3 - Q\sin^2\theta_W)\frac{1-\gamma^5}{2} + \frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^\mu(-Q\sin^2\theta_W)\frac{1+\gamma^5}{2}\right]\psi_F \tag{62}$$

$$\overline{\psi_F}\left[\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^\mu(I_3 - Q\sin^2\theta_W) + \frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^\mu(-Q\sin^2\theta_W)\right]\psi_F \tag{63}$$

$$= \overline{\psi_F}\gamma^\mu[(I_3 - 2Q\sin^2\theta_W) - I_3\gamma^5]\psi_F \tag{64}$$

Les couplages des fermions au boson Z^0 sont résumés dans la table suivante (Table 2) La violation de la parité dans le courant faible neutre n'est pas maximale puisque les coefficients de γ^μ et $\gamma^\mu\gamma^5$ n'ont pas le même poids. Cette violation dépend de $\sin^2\theta_W$ de façon différente suivant qu'il s'agit d'une interaction lepton-lepton, lepton- quark ou quark-quark. On devra donc envisager des vérifications expérimentales dans ces trois secteurs. On devrait arriver à une valeur unique de $\sin^2\theta_W$.

Le courant chargé ne fait intervenir que les composantes gauches puisqu'il ne contient que l'isospin faible $I = 1/2$. Le modèle prédit une violation maximale de la parité, tel que prévu, et en accord avec l'expérience. Ainsi, le couplage électron-neutrino-W a la forme:

$$g\left[(\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu e_L^-)W_\mu^+ + (\overline{e_L}\gamma^\mu\nu_{eL})W_\mu^-\right] \tag{65}$$

et de même pour les quarks.

4.5 Interactions Fermions-Bosons scalaires

Pour donner de la masse aux fermions on introduit des couplages de Yukawa de la forme:

$$\mathcal{L}_{Yuk.} = G_{up}(\overline{L}\phi^C R + \overline{R}(\phi^C)^\dagger L) \tag{66}$$

$$\mathcal{L}_{Yuk.} = G_{down}(\overline{L}\phi R + \overline{R}\phi^\dagger L) \tag{67}$$

****

Exercice: montrer que ces termes satisfont bien à l'invariance $SU(2) \otimes U(1)$.

****

ce qui conduit aux termes de masse (de Dirac):

$$G_{up}\left[\begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{d_L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} d_R + \overline{d_R}\begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right] \tag{68}$$

$$G_{down}\left[\begin{pmatrix} \overline{u_L} & \overline{d_L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} d_R + \overline{d_R}\begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right] \tag{69}$$

pour les fermions "up" and "down" respectivement. Par exemple, pour les quarks:

$$vG_u(\overline{u_L}u_R + \overline{u_R}u_L) \tag{70}$$

$$vG_d(\overline{d_L}d_R + \overline{d_R}d_L) \tag{71}$$

et pour l'électron:

$$vG_e(\overline{e_L}e_R + \overline{e_R}e_L) \tag{72}$$

Il faut introduire arbitrairement autant de constantes G que de fermions.

Comme il n'existe pas de composante droite pour le neutrino il est impossible de constituer un terme de masse de Dirac. Mais il n'est pas possible de constituer un terme de Majorana non plus à cause de la structure du secteur scalaire (un doublet). Comme il faut utiliser deux doublets de fermions (le doublet neutrino-électron et son conjugué de charge) il est impossible d'écrire un terme possédant l'invariance $SU(2) \otimes U(1)$. Dans le cadre du Modèle Standard le neutrino reste donc une particule de masse nulle. Par contre, dans certaines extensions du Modèle Standard on introduit un triplet de bosons scalaires, ce qui permet de rendre le neutrino massif.

4.6 Extension du modèle à plusieurs générations

Elle demande une hypothèse supplémentaire. Nous allons supposer que c'est le même groupe de jauge qui décrit les différentes générations, avec les mêmes constantes de couplage. C'est l'hypothèse de l'universalité, sur laquelle nous reviendrons.

4.7 Comportement à basse énergie

Il s'agit de phénomènes bien connus et abondamment étudiés expérimentalement:

- La désintégration du muon.
- La désintégration β.
- La capture des muons par les noyaux.

À basse énergie, le propagateur du boson W se simplifie:

$$\frac{1}{q^2 + M_W^2} \to \frac{1}{M_W^2} \tag{73}$$

et le Lagrangien effectif décrivant la désintégration du muon prend la forme:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g^2}{8M_W^2}\left[\overline{\nu_\mu}\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\mu\right]\left[\overline{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e\right] \tag{74}$$

On tombe sur l'ancienne formulation connue sous le nom de "théorie $V-A$" à quatre fermions. La constante de couplage de Fermi G_F est alors donnée par:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} \tag{75}$$

On en déduit:

$$v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \tag{76}$$

La constante de Fermi (avec $\hbar = c = 1$)[2]:

$$G_F = 1.16639 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{77}$$

d'où:

$$v = 246\ \mathrm{GeV} \tag{78}$$

Il est possible de faire des prédictions pour les masses des bosons:

$$M_W = \frac{1}{\sin\theta_W}\left(\frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F}\right)^{1/2} = \frac{37.28\mathrm{GeV}}{\sin\theta_W} \qquad\qquad M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \tag{79}$$

La valeur de $\sin^2\theta_W$ permet donc de calculer les masses des bosons W et Z. expérimentalement, on trouve que $\sin^2\theta_W \sim 0.2311$[3].

5 Critique du Modèle Standard

Le Modèle Standard fonctionne remarquablement bien, surtout dans le secteur des interactions électrofaibles. En particulier, toutes ses prédictions concernant le secteur du courant faible neutre sont compatibles avec l'expérience. Les diverses déterminations de $\sin^2\theta_W$ sont compatibles entre elles, alors que les expériences recouvrent un domaine d'énergie très étendu: de l'électron-volt (violation de la parité en physique atomique) aux GeV et centaines de GeV (physique du neutrino, collisions $e^+ - e^-$). Il reste à vérifier le modèle au niveau de précision des corrections radiatives (quelques %), ce qui demande des expériences précises. C'est la mission de LEP. Il faudra aussi vérifier les prédictions spécifiques des théories de jauge en ce qui concerne les couplages des bosons de jauge entre eux (interactions à trois ou quatre bosons). Cette partie du programme ne pourra être réalisée que lorsque l'énergie de LEP sera doublée (LEP2, 100 GeV par faisceau). Et surtout il faudra trouver le boson de Higgs, particule physique dont la masse n'est pas prédite par le modèle. Le quark t (top) n'a toujours pas été observé mais il existe des preuves indirectes de son existence (le quark b doit être dans un doublet). De même, le neutrino ν_τ n'a pas été observé mais toute la physique du τ s'accorde avec l'existence du neutrino dont la masse est certainement inférieure à ~ 50 MeV. La Chromo-Dynamique Quantique (CDQ) est un bon candidat pour la description des interactions fortes, mais il reste encore beaucoup de travail à faire, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental avant de conclure de façon définitive. Cependant, les physiciens sont très insatisfaits du Modèle Standard, et ceci pour de nombreuses raisons:

- Le modèle doit faire appel à un grand nombre de paramètres arbitraires: trois constantes de couplage, les paramètres associés à la génération de masse des fermions de toutes les générations, les paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa, la masse du boson de Higgs.

- Le modèle n'explique pas pourquoi il y a plusieurs générations de fermions, ne dit rien évidemment sur le nombre de générations et sur les relations entres elles.

- Contrairement à ce qui est dit souvent, le modèle n'est pas une véritable théorie unificatrice des interactions faibles et électromagnétiques puisque $\sin^2\theta_W$ n'est pas prédit et doit être tiré de l'expérience. Les interactions fortes constituent un secteur à part. La gravitation est laissée de coté.

- Il y a beaucoup d'arbitraire dans le modèle, et les attributions de nombres quantiques sont faites “à la main”. Le modèle ne dit pas pourquoi les composantes gauches des fermions sont dans des doublets et les composantes droites dans des singulets, et donc ne fournit aucune indication sur l'origine de la violation de la parité. La masse des neutrinos est mise à zéro “à la main”.

- L'explication profonde du mécanisme de Higgs nous échappe et il est impossible de prédire la masse du boson de Higgs. Dans les théories de “Grande Unification” on est confronté au problème de la “hiérarchie”. Il y a deux brisures de symétrie se produisant à des échelles d'énergie différant par de nombreux ordres de grandeur: vers 10^{15} GeV (brisure de la symétrie du groupe de jauge unificateur) et vers 300 GeV (brisure de la symétrie de jauge électrofaible). La masse du boson de Higgs conventionnel reçoit des corrections de l'échelle de masse supérieure et ces corrections sont énormes. La masse du boson de Higgs est instable et pour stabiliser cette masse if faut se livrer à un réglage fin des paramètres du modèle qui est totalement incrédible.

Pour conclure, le Modèle Standard n'est pas la théorie ultime de l'univers. C'est probablement une bonne approximation, valable à basse énergie, d'une théorie plus complète qui reste à construire. D'où la nécessité d'aller voir "au delà du Modèle Standard".

References

[1] *"An introduction to gauge theories"*, J. Iliopoulos, Lectures given in the Academic Training Programme of CERN 1975-1976, CERN 76-11, 15 June 1976.

[2] *"Review of Particle properties"*, Phys. Rev D 54, 1 July 1996, Part I, page 65.

[3] Voir la section 10 de *"Review of Particle properties"*, Phys. Rev D 54, 1 July 1996, Part I, page 85.