Chapitre 12

Les oscillations des neutrinos dans le vide L'effet Mikheev-Smirnov-Wolfenstein (MSW)

1 Les oscillations des neutrinos dans le vide

Nous allons considérer le cas de deux saveurs seulement, afin de ne pas alourdir le formalisme. On pourra ensuite généraliser facilement à n saveurs. Nous traiterons le cas de deux neutrinos. Le même formalisme peut être appliqué aux antineutrinos.

Sauf dans le cas trivial où les neutrinos sont de même masse, les états qui participent aux interactions faibles, $|\nu_e\rangle$ et $|\nu_\mu\rangle$, ne coïncident pas nécessairement avec les états propres de la masse, $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ (de masses m_1 et m_2 respectivement).

On passe d'une base à l'autre au moyen d'une matrice de type Cabibbo. Comme dans le cas des quarks, cette matrice peut être rendue réelle par un choix de phases pour les différentes particules (ceci étant vrai pour deux saveurs seulement):

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \tag{1}$$

et inversement:

$$\begin{pmatrix} |\nu_1 \\ |\nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e \\ |\nu_\mu \end{pmatrix} \tag{2}$$

On verra qu'il est possible de restreindre les valeurs de θ à l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

L'état le plus général d'un neutrino évoluera en fonction du temps suivant:

$$|\nu(t)\rangle = \nu_1(t)|\nu_1\rangle + \nu_2(t)|\nu_2\rangle \tag{3}$$

où l'on a développé sur la base de la masse, avec:

$$\nu_1(t) = \exp(-iE_1t)\nu_1(0) \tag{4}$$

$$\nu_2(t) = \exp(-iE_2t)\nu_2(0) \tag{5}$$

(on a posé $\hbar = c = 1$).

On peut faire un changement de base:

$$|\nu(t)\rangle = \nu_e(t)|\nu_e\rangle + \nu_\mu(t)|\nu_\mu\rangle \tag{6}$$

ce qui donne:

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

et inversement:

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

D'où l'équation d'évolution:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (E_2+E_1)-(E_2-E_1)\cos 2\theta & (E_2-E_1)\sin 2\theta \\ (E_2-E_1)\sin 2\theta & (E_2+E_1)+(E_2-E_1)\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

On a donc une équation de la forme:

$$i\frac{d}{dt}\nu(t) = M\nu(t) \tag{10}$$

avec:

$$M = \frac{1}{2}(E_2+E_1)\mathcal{I} + \frac{1}{2}(E_2-E_1)(-\cos 2\theta\sigma_z + \sin 2\theta\sigma_x) \tag{11}$$

et:

$$\nu(t) = \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{12}$$

où $\mathcal{I}$ est la matrice unité et les σ_i les matrices de Pauli.
Faisons alors le changement de phase:

$$\nu(t) = \exp\left(-i\frac{E_2+E_1}{2}t\right)\tilde{\nu}(t) \tag{13}$$

qui ne change pas les probabilités mais simplifie le calcul.
Avec $\omega = \frac{1}{2}(E_2 - E_1)$ et $M_0 = -\cos 2\theta\sigma_z + \sin 2\theta\sigma_x$ on trouve:

$$i\frac{d}{dt}\tilde{\nu}(t) = \omega M_0 \tilde{\nu}(t) \tag{14}$$

On intègre, ce qui donne:

$$\tilde{\nu}(t) = \exp(-i\omega M_0 t)\tilde{\nu}(0) \tag{15}$$

et comme la matrice M_0 a pour carré l'unité:

$$\tilde{\nu}(t) = (\cos\omega t - iM_0 \sin\omega t)\tilde{\nu}(0) \tag{16}$$

soit pour les composantes de saveur:

$$\tilde{\nu}_e(t) = (\cos\omega t + i\cos 2\theta \sin\omega t)\tilde{\nu}_e(0) - i\sin 2\theta \sin\omega t \tilde{\nu}_\mu(0) \tag{17}$$

$$\tilde{\nu}_\mu(t) = (\cos\omega t - i\cos 2\theta \sin\omega t)\tilde{\nu}_\mu(0) - i\sin 2\theta \sin\omega t \tilde{\nu}_e(0) \tag{18}$$

Si l'on fait $\theta = 0$ on voit que les fréquences $+\omega$ et $-\omega$ sont associées à ν_e et ν_μ respectivement. Considérons maintenant une onde plane de neutrinos, caractérisée par une valeur précise de l'impulsion p. Évidemment, il serait plus rigoureux de se placer dans un formalisme de paquets d'ondes, mais cela conduirait à des calculs plus compliqués. On a alors:

$$E_2 - E_1 = \sqrt{p^2 + m_2^2} - \sqrt{p^2 + m_1^2} \tag{19}$$

et comme les masses sont beaucoup plus petites que p:

$$E_2 - E_1 = p(1 + \frac{m_2^2}{2p} + ... - 1 - \frac{m_1^2}{2p} - ...) \approx \frac{m_2^2 - m_1^2}{2p} \tag{20}$$

En définissant $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ on trouve:

$$\omega = \frac{\Delta m^2}{4p} \tag{21}$$

Puisque la vitesse du neutrino est très voisine de c $(= 1)$ nous ferons une approximation supplémentaire et transformerons la dépendance en temps en une dépendance en distance. On trouve alors les probabilités d'observer le neutrino dans les différents états de saveur, à une distance L:

$$P(\nu_e; L) = |\tilde{\nu}_e(L)|^2 = |\tilde{\nu}_e(0)|^2 \cos^2\frac{\pi L}{\lambda} + |\tilde{\nu}_e(0)\cos 2\theta - \tilde{\nu}_\mu(0)\sin 2\theta|^2 \sin^2\frac{\pi L}{\lambda} \tag{22}$$

$$P(\nu_\mu; L) = |\tilde{\nu}_\mu(L)|^2 = |\tilde{\nu}_\mu(0)|^2 \cos^2\frac{\pi L}{\lambda} + |\tilde{\nu}_\mu(0)\cos 2\theta + \tilde{\nu}_e(0)\sin 2\theta|^2 \sin^2\frac{\pi L}{\lambda} \tag{23}$$

On vérifie que $P(\nu_e; L) + P(\nu_\mu; L) = 1$, ce qui est normal puisque nous avons considéré un neutrino *stable.*

On a introduit la longueur d'onde d'oscillation λ:

$$\lambda = \frac{4\pi p}{\Delta m^2} = 2.48 \text{ mètres } \frac{p\ (\text{MeV-c}^{-1})}{\Delta m^2 (\text{eV}^2)} \tag{24}$$

En général le neutrino sera produit à $L = 0$ par une interaction faible, donc dans un état de saveur bien déterminé. Par exemple, un neutrino est produit dans le soleil dans l'état électronique. On a alors $\nu_e(0) = 1$ et $\nu_\mu(0) = 0$. D'où:

$$P(\nu_e; L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\pi L}{\lambda} \tag{25}$$

$$P(\nu_\mu; L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\pi L}{\lambda} \tag{26}$$

Quand on s'éloigne de la source il a disparition de neutrinos électroniques et apparition de neutrinos muoniques. On voit que c'est la différence de masse qui détermine la longueur d'oscillation et que c'est l'angle de mélange qui détermine l'amplitude.

Cette dernière est maximale pour $\theta = \pi/4$. On voit aussi qu'il suffit de faire varier θ de 0 à $\pi/4$.

En raison des approximations qui sont faites les oscillations seront brouillées à une certaine distance de la source et on observera alors des valeurs moyennes (la moyenne étant faite sur la variable L):

$$\langle P(\nu_e) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \tag{27}$$

$$\langle P(\nu_\mu) \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \tag{28}$$

Avec le mélange maximal ($\theta = \pi/4$) on trouve:

$$\langle P(\nu_e) \rangle = \langle P(\nu_\mu) \rangle = \frac{1}{2} \tag{29}$$

Le résultat se généralise facilement à trois saveurs[?] et avec le mélange maximal on trouve:

$$\langle P(\nu_e) \rangle = \langle P(\nu_\mu) \rangle = \langle P(\nu_\tau) \rangle = \frac{1}{3} \tag{30}$$

2 Oscillations des neutrinos dans la matière

Jusqu'ici nous avons considéré la propagation des neutrinos dans le vide. Dans la matière les neutrinos subissent des interactions, et comme la matière contient des électrons (pas de muons ni de tauons) les neutrinos de différentes saveurs n'interagissent pas de la même façon. Les neutrinos électroniques sont les seuls qui peuvent interagir par courant chargé (échange de W^+). Tous les neutrinos peuvent interagir par courant neutre (échange de Z^0). Il en résulte des effets intéressants[?, ?, ?]. Bethe[?] a montré que cela introduit un terme d'énergie potentielle spécial au neutrino électronique. L'interaction est donnée par

$$H = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \right] \left[\overline{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \right] \tag{31}$$

Mais, après une transformation de Fierz, on peut aussi écrire:

$$H = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \right] \left[\overline{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \right] \tag{32}$$

Pour des électrons au repos seule la matrice γ^0 intervient, et $(1 - \gamma^5)$ se réduit à l'unité. Le terme $(\overline{e}\gamma^0 e)$ est la densité des électrons. Un facteur 2 résulte de la présence de $(1-\gamma^5)$ devant le neutrino. On a donc une énergie potentielle pour le neutrino électronique:

$$V = G\sqrt{2} N_e \tag{33}$$

où G est la constante de Fermi et N_e le nombre d'électrons par unité de volume.
Le résultat précédent devra être modifié, ce qui donne:

$$i\frac{d}{dt}\nu(t) = M + \begin{pmatrix} G\sqrt{2}N_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \nu(t) \tag{34}$$

soit:

$$i\frac{d}{dt}\nu(t) = M'\nu(t) \tag{35}$$

avec:

$$M' = \frac{1}{2}(E_2 + E_1 + GN_e/\sqrt{2})\mathcal{I} + \frac{1}{2}(E_2 - E_1)[(k - \cos 2\theta)\sigma_z + \sin 2\theta \sigma_x]$$

$$= \frac{1}{2}(E_2 + E_1 + GN_e/\sqrt{2})\mathcal{I} + \omega M_0' \tag{36}$$

avec:

$$k = \frac{GN_e\sqrt{2}}{E_2 - E_1} \tag{37}$$

et:

$$M_0' = (k - \cos 2\theta)\sigma_z + \sin 2\theta \sigma_x \tag{38}$$

La matrice M_0' a pour carré $(1 - 2k\cos\theta + k^2)$ et on peut l'écrire sous la forme:

$$M_0' = (1 - 2k\cos 2\theta + k^2)^{1/2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_m & \sin 2\theta_m \\ \sin 2\theta_m & \cos 2\theta_m \end{pmatrix} \tag{39}$$

avec:

$$\cos 2\theta_m = \frac{\cos 2\theta - k}{(1 - 2k\cos 2\theta + k^2)^{1/2}} \tag{40}$$

$$\sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{(1 - 2k\cos 2\theta + k^2)^{1/2}} \tag{41}$$

L'angle θ_m dépend de la densité du milieu traversé, donc de la position du neutrino. On fera l'hypothèse que la variation de la densité est suffisamment lente (pendant la durée d'une oscillation) pour que l'on puisse faire une *approximation adiabatique*. L'angle θ_m est un déphasage local, qui varie le long de la trajectoire du neutrino. On peut aussi introduire la fréquence locale:

$$\omega_m = \omega(1 - 2k\cos 2\theta + k^2)^{1/2} \tag{42}$$

Une résonance se produit pour:

$$2GN_e\sqrt{2}p = \Delta m^2 \cos 2\theta \tag{43}$$

numériquement, en introduisant la densité ρ (en g/cm^3) et Y le nombre d'électrons par atome:

$$GN_e\sqrt{2}p = 3.67 \times 10^{-24}\ 2\rho Y \text{ (en eV)} \tag{44}$$

Les conditions peuvent être réalisées pour que la résonance se produise quelque part à l'intérieur du soleil. Examinons alors la variation des fréquences en fonction de la densité (ou encore en fonction de k pour des valeurs de p et de Δm^2 fixées. On obtient deux branches de courbes ayant pour asymptotes les droites de pentes $\pm\omega$ passant par le point $k = \cos 2\theta$. Un neutrino électronique créé dans une région de grande densité suivra la courbe supérieure, et si la condition d'adiabaticité est satisfaite, se retrouvera à l'état muonique. Seuls les neutrinos ayant une énergie supérieure à un certain seuil subiront cette transition. Les neutrinos de basse énergie ne seront pas altérés. Suivant les valeurs choisies pour θ et Δm^2 plusieurs scénarios peuvent être imaginés, qui tentent de résoudre le problème des neutrinos solaires, une énigme qui a occupé les physiciens et les astrophysiciens pendant un bon nombre d'années.

References

[1] *"Gauge theory of elementary particle physics"*, Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[2] *"Neutrino Oscillations in Matter"*, L. Wolfenstein, Phys. Rev. D17 2369 1978.

[3] *"Resonant Amplification of ν Oscillations in Matter and Solar Neutrino Spectroscopy"*, S.P. Mikheyev and A. Yu Smirnov, Nuovo Cimento 9C 17 1986.

[4] *"Matter Effects for Solar Neutrino Oscillations"*, J. Bouchez et al., Z. Phys. C32 499 1986.

[5] *"Possible Explanation of the Solar-Neutrino Puzzle"*, H.A. Bethe, Phys. Rev. Lett. 56 1305 1986.

[6] *"Neutrino Oscillations"*, A.K. Mann, Comments Nucl. Part. Phys. 10 155 1981.