Chapitre 13

La violation de CP (système des kaons)

1 Évolution d'une particule

Soit une particule stable, dans son référentiel propre ($E = Mc^2 = \hbar\omega$). Son équation d'évolution s'écrit:

$$\psi(t) = \exp(-i\omega t)\ \psi(0) = \exp(-iMt)\ \psi(0) \tag{1}$$

avec $\hbar = c = 1$.
C'est la solution de l'équation d'évolution:

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = M\psi(t) \tag{2}$$

On a évidemment:

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 \tag{3}$$

puisque la particule est stable.
Pour une particule instable, on a l'équation d'évolution:

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right)\psi(t) \tag{4}$$

$$\psi(t) = \exp\left[-i\left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right)t\right]\ \psi(0) \tag{5}$$

où M (la masse) et Γ (la largeur de masse) sont des nombres réels et positifs.

$$|\psi(t)|^2 = \exp(-\Gamma t)\ |\psi(0)|^2 = \exp(-t/\tau)\ |\psi(0)|^2 \tag{6}$$

où τ est la vie moyenne.

2 États couplés

Considérons le système des kaons neutres et leurs étrangetés:

$$S\ |K^0\rangle = +1 \qquad\qquad S\ |\overline{K}^0\rangle = -1 \tag{7}$$

L'étrangeté n'est pas conservée par les interactions faibles, donc les deux états des kaons neutres sont couplés entre eux, ainsi qu'à un continuum (produits de désintégration). On peut donc mélanger les deux états. L'état le plus général s'écrit:

$$|K(t)\rangle = K^0(t)\ |K^0\rangle + \overline{K}^0(t)\ |\overline{K}^0\rangle \tag{8}$$

où $|K^0\rangle$ et $|\overline{K}^0\rangle$ sont les états de base, $K^0(t)$ et $\overline{K}^0(t)$ des amplitudes dépendant du temps. La fonction d'onde du kaon a deux composantes, sur laquelle agissent des opérateurs M et Γ, matrices 2×2:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|K(t)\rangle = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right)|K(t)\rangle \tag{9}$$

ou encore:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{00} - (i/2)\Gamma_{00} & M_{0\bar{0}} - (i/2)\Gamma_{0\bar{0}} \\ M_{\bar{0}0} - (i/2)\Gamma_{\bar{0}0} & M_{\bar{0}\bar{0}} - (i/2)\Gamma_{\bar{0}\bar{0}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Les opérateurs M et γ sont des observables, ils sont donc hermitiques, d'où:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{00} - (i/2)\Gamma_{00} & M_{0\bar{0}} - (i/2)\Gamma_{0\bar{0}} \\ M^*_{0\bar{0}} - (i/2)\Gamma^*_{0\bar{0}} & M_{\bar{0}\bar{0}} - (i/2)\Gamma_{\bar{0}\bar{0}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Les éléments de matrices sont donnés par la théorie des perturbations:

$$M_{ij} = M^*_{ji} = M_K\ \delta_{ij} + \langle i|H_W|j\rangle + P\sum_n \frac{1}{M_K - E_n}\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle \tag{12}$$

$$\Gamma_{ij} = \Gamma^*_{ji} = 2\pi\sum_n \langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle\ \delta(E_n - M_K) \tag{13}$$

3 Invariances

Les matrices M et Γ s'écrivent de façon générale:

$$M(\Gamma) = a + b\tau_1 + c\tau_2 + d\tau_3 \tag{14}$$

et de même pour la matrice Γ. Les τ_i sont les matrices de Pauli. Comme M et Γ sont hermitiques, les a, b, c et d sont des nombres réels.

Utilisons la définition simpliste de CP:

$$CP\ |K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle \qquad CP\ |\overline{K}^0\rangle = |K^0\rangle \tag{15}$$

soit:

$$CP = (CP)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \tag{16}$$

On a alors:

$$(CP)^{-1}H(CP) = a + b\tau_1 - c\tau_2 - d\tau_3 \tag{17}$$

D'autre part, T est un opérateur antiunitaire, donc:

$$T^{-1}HT = a + b\tau_1 - c\tau_2 + d\tau_3 \tag{18}$$

car τ_2 est imaginaire pure, alors que τ_1 et τ_3 sont réelles.
Et aussi:

$$(CPT)^{-1}H(CPT) = a + b\tau_1 + c\tau_2 - d\tau_3 \tag{19}$$

On arrive donc au résultat de la table 1.

Terme	CP	T	CPT
a	oui	oui	oui
b	oui	oui	oui
c	non	non	oui
d	non	oui	non

Table 1: Symétries de l'hamiltonien H.

avec les conventions suivantes:

- oui: respecte l'invariance
- non: viole l'invariance

3.1 Invariance CPT

Si l'on postule l'invariance CPT on a:

$$d = 0 \qquad M_{00} = M_{\overline{00}} = M \qquad \Gamma_{00} = \Gamma_{\overline{00}} = \Gamma \tag{20}$$

Avec le changement de notation:

$$M_{0\overline{0}} = m \qquad \Gamma_{0\overline{0}} = \gamma \tag{21}$$

on arrive à:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - (i/2)\Gamma & m - (i/2)\gamma \\ m^* - (i/2)\gamma^* & M - (i/2)\Gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} \tag{22}$$

3.2 Invariance CP

Si l'on postule l'invariance CP on a:

$$c = 0 \qquad m = m^* \qquad \gamma = \gamma^* \tag{23}$$

et:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - (i/2)\Gamma & m - (i/2)\gamma \\ m - (i/2)\gamma & M - (i/2)\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^0(t) \\ \overline{K}^0(t) \end{pmatrix} \tag{24}$$

En fait cette condition est suffisante mais non nécessaire. Utilisons une définition plus générale de CP:

$$CP\ |K^0\rangle = \exp(i\theta)|\overline{K}^0\rangle \qquad\qquad CP\ |\overline{K}^0\rangle = \exp(-i\theta)|K^0\rangle \tag{25}$$

soit:

$$CP = \begin{pmatrix} 0 & \exp(i\theta) \\ \exp(-i\theta) & 0 \end{pmatrix} = (CP)^{-1} \tag{26}$$

On a alors:

$$(CP)^{-1}H(CP) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \exp(i\theta) \\ \exp(-i\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M - (i/2)\Gamma & m - (i/2)\gamma \\ m^* - (i/2)\gamma^* & M - (i/2)\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \exp(i\theta) \\ \exp(-i\theta) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} M - (i/2)\Gamma & (m^* - (i/2)\gamma^*)\exp(2i\theta) \\ (m - (i/2)\gamma)\exp(-2i\theta) & M - (i/2)\Gamma \end{pmatrix} \tag{27}$$

L'invariance CP impose donc:

$$m^*\exp(2i\theta) \;=\; m\ \exp(-2i\theta) \tag{28}$$

$$\gamma^*\exp(2i\theta) \;=\; \gamma\ \exp(-2i\theta) \tag{29}$$

Ceci conduit à:

$$\mathrm{Arg}\ m = \mathrm{Arg}\ \gamma \tag{30}$$

Le paramètre de violation est donc

$$p = \mathrm{Arg}\ \frac{\gamma}{m} \tag{31}$$

4 Recherche de solutions physiques

Ce sont des solutions à décroissance exponentielle, de la forme $\exp(-ixt)$. On les obtient par diagonalisation:

$$\begin{vmatrix} M-(i/2)\Gamma - x & (m^*-(i/2)\gamma^*)\exp(2i\theta) \\ (m-(i/2)\gamma)\exp(-2i\theta) & M-(i/2)\Gamma - x \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

ce qui conduit à l'équation:

$$x^2 - 2x\left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right) + \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right)^2 - \left(m - \frac{i}{2}\gamma\right)\left(m^* - \frac{i}{2}\gamma^*\right) = 0 \tag{33}$$

avec les solutions:

$$x = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right) \pm \left[\left(m - \frac{i}{2}\gamma\right)\left(m^* - \frac{i}{2}\gamma^*\right)\right]^{1/2} \tag{34}$$

On prédit l'existence de deux particules physiques avec des masses:

$$M_{(1,2)} = M \pm \mathcal{R}e\left[\left(m - \frac{i}{2}\gamma\right)\left(m^* - \frac{i}{2}\gamma^*\right)\right]^{1/2} \tag{35}$$

et des largeurs de masses:

$$\Gamma_{(1,2)} = \Gamma \pm \mathcal{I}m\left[\left(m - \frac{i}{2}\gamma\right)\left(m^* - \frac{i}{2}\gamma^*\right)\right]^{1/2} \tag{36}$$

Les différences sont:

$$\Delta M = M_1 - M_2 = 2\mathcal{R}e\left[\left(m - \frac{i}{2}\gamma\right)\left(m^* - \frac{i}{2}\gamma^*\right)\right]^{1/2} \tag{37}$$

$$\Delta\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 = -4\mathcal{I}m\left[\left(m - \frac{i}{2}\gamma\right)\left(m^* - \frac{i}{2}\gamma^*\right)\right]^{1/2} \tag{38}$$

On observe effectivement deux kaons neutres avec:

$$\Delta M = (0.5310 \pm 0.0019) \times 10^{10}\hbar/\text{s.} = (3.495 \pm 0.013) \times 10^{-12}\ \text{MeV} \tag{39}$$

$$\tau_S = (0.8932 \pm 0.0010) \times 10^{-10}\ \text{s.} \tag{40}$$

$$\tau_L = (0.515 \pm 0.004) \times 10^{-7}\ \text{s.} \tag{41}$$

On recherche des solutions de la forme:

$$|K_S(t)\rangle = |K_S\rangle \exp(-ix_1 t) \tag{42}$$
$$|K_L(t)\rangle = |K_L\rangle \exp(-ix_2 t) \tag{43}$$

avec:

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[\exp(i\theta/2)(1+\epsilon)|K^0\rangle + \exp(-i\theta/2)(1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\right] \tag{44}$$
$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[\exp(i\theta/2)(1+\epsilon)|K^0\rangle - \exp(-i\theta/2)(1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\right] \tag{45}$$

et:

$$x_{1,2} = (M - \frac{i}{2}\Gamma) \pm \left[|m|^2 - \frac{1}{4}|\gamma|^2 - i|m||\gamma|\cos \mathrm{Arg}\frac{\gamma}{m}\right]^{1/2} \tag{46}$$

On trouve:

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \left[\frac{|m| - (i/2)|\gamma|\exp(-i\mathrm{Arg}(\gamma/m))}{|m| - (i/2)|\gamma|\exp(+i\mathrm{Arg}(\gamma/m))}\right]^{1/2} \exp(i\theta) \tag{47}$$

Si CP est conservé:

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \exp(i\theta) \tag{48}$$

d'où:

$$\epsilon = -i\tan\frac{\theta}{2} \tag{49}$$

Si CP est conservé ϵ est imaginaire pur.
Une première cause de la violation de CP est donc:

$$\mathcal{R}e(\epsilon) \neq 0 \tag{50}$$

Son origine est dans la matrice de masse.
On a donc les deux états physiques:

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[\exp(i\theta/2)(1+\epsilon)|K^0\rangle + \exp(-i\theta/2)(1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\right] \tag{51}$$
$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[\exp(i\theta/2)(1+\epsilon)|K^0\rangle - \exp(-i\theta/2)(1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\right] \tag{52}$$

ou encore:

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[|K_1^0\rangle + \epsilon|K_2^0\rangle\right] \tag{53}$$
$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[|K_2^0\rangle + \epsilon|K_1^0\rangle\right] \tag{54}$$

$$\tag{55}$$

On trouve le produit scalaire:

$$\langle K_L | K_S \rangle = \frac{2\mathcal{R}e(\epsilon)}{1 + |\epsilon|^2} \tag{56}$$

On voit que les deux états $|K_S\rangle$ et $|K_L\rangle$ ne sont pas orthogonaux si l'invariance CP est violée. On a introduit les états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ définis par:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{2}\left[|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle\right] \tag{57}$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{2}\left[|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle\right] \tag{58}$$

Les états $|K^0\rangle$ et $|\overline{K}^0\rangle$ sont des états propres de l'étrangeté:

$$S\ |K^0\rangle = +1\ |K^0\rangle \tag{59}$$

$$S\ |\overline{K}^0\rangle = -1\ |\overline{K}^0\rangle \tag{60}$$

alors que les états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ sont des états propres de CP:

$$CP\ |K_1^0\rangle = +1\ |K_1^0\rangle \tag{61}$$

$$CP\ |K_2^0\rangle = -1\ |K_2^0\rangle \tag{62}$$

5 Violation directe de CP

Il existe une autre source de violation de CP. Elle est liée à la présence d'une phase entre deux éléments de matrice. Ces deux éléments de matrice correspondant à deux états d'isospin du système de deux pions.

5.1 Le système de deux pions: états d'isospin et symétries

Les pions constituent un triplet d'isospin ($I = 1$):

$$\begin{array}{ll} |\pi^+\rangle & (I_z = +1) \\ |\pi^0\rangle & (I_z = \ \ 0) \\ |\pi^-\rangle & (I_z = -1) \end{array} \tag{63}$$

Le système de deux pions peut se trouver dans les états d'isospin $I = 0, 1, 2$. On obtient les expressions de tous les états en faisant appel aux coefficients de Clebsch-Gordan, ou encore en utilisant la méthode exposée dans l'appendice 1.

Pour I = 2

$$
\begin{aligned}
|2+2\rangle &= |\pi^+\pi^+\rangle \\
|2+1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^+\pi^0\rangle + |\pi^0\pi^+\rangle\Big) \\
|2\quad 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|\pi^+\pi^-\rangle + 2|\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle\Big) \\
|2-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^-\pi^0\rangle + |\pi^0\pi^-\rangle\Big) \\
|2-2\rangle &= |\pi^-\pi^-\rangle
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Pour I = 1

$$
\begin{aligned}
|1+1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^0\pi^+\rangle - |\pi^+\pi^0\rangle\Big) \\
|1\quad 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^-\pi^+\rangle - |\pi^+\pi^-\rangle\Big) \\
|1-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^-\pi^0\rangle - |\pi^0\pi^-\rangle\Big)
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Pour I = 0

$$
|0\quad 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle\Big) \tag{66}
$$

5.1.1 Symétries

Comment se transforment les états de deux pions si l'on effectue une permutation des deux particules? Il suffit de regarder les expressions ci-dessus pour conclure:

- $I = 2$: état symétrique
- $I = 1$: état antisymétrique
- $I = 0$: état symétrique

5.1.2 Désintégration du kaon neutre en deux pions

Il y a deux modes:

$$
\begin{aligned}
K^0(\overline{K}^0) &\rightarrow \pi^+\pi^- \\
K^0(\overline{K}^0) &\rightarrow \pi^0\pi^0
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Appliquons les règles de conservation du moment angulaire (à noter que la parité n'est pas conservée puisqu'il s'agit d'une interaction faible).

$$\vec{S}_K = \vec{S}_{\pi 1} + \vec{S}_{\pi 2} + \vec{L} \tag{68}$$

Les spins du kaon et des pions sont nuls, donc le moment orbital relatif des deux pions est aussi nul ($l = 0$). La fonction d'onde spatiale de ces deux pions est donc symétrique. La fonction d'onde de spin est évidemment symétrique. Comme les pions sont des bosons le principe de Pauli exige que la fonction d'onde totale (espace $\times$ spin $\times$ isospin) soit symétrique. Il en résulte que la fonction d'onde d'isospin doit être symétrique. Par conséquent les deux pions seront émis dans des états d'isospin $I = 0$ et $I = 2$ seulement.
On doit considérer les deux modes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle\Big) &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|2\ 0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\ 0\rangle \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\ 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\ 0\rangle \end{aligned} \tag{69}$$

6 Les quantités observables

Il faut maintenant calculer les quantités η_{+-} et η_{00} qui sont accessibles expérimentalement.
Définissons les éléments de matrices:

$$\begin{aligned} \langle 2\pi(I=0)|H_W|K^0\rangle &= a_0 \exp(i\delta_0) \\ \langle 2\pi(I=0)|H_W|\overline{K}^0\rangle &= a_0^* \exp(i\delta_0) \\ \langle 2\pi(I=2)|H_W|K^0\rangle &= a_2 \exp(i\delta_2) \\ \langle 2\pi(I=2)|H_W|\overline{K}^0\rangle &= a_2^* \exp(i\delta_2) \end{aligned} \tag{70}$$

où H_W est l'hamiltonien de l'interaction.
La transformation CPT fait passer d'un élément de matrice à son complexe conjugué:

$$\begin{aligned} a_0 &\rightarrow a_0^* \\ a_2 &\rightarrow a_2^* \end{aligned} \tag{71}$$

Il faut aussi introduire les déphasages δ_0 et δ_2 qui sont dûs à l'interaction forte entre les deux pions dans l'état final.
On se rappelle les expressions des états $|K_S\rangle$ et $|K_L\rangle$:

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\Big[(1+\epsilon)|K^0\rangle + (1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\Big] \\ |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\Big[(1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\Big] \end{aligned} \tag{72}$$

On a alors:

$$\begin{aligned}
\langle 2\pi(I=0)|H_W|K_S\rangle &= \Big[\epsilon(a_0-a_0^*)+(a_0+a_0^*)\Big]\exp(i\delta_0)\\
\langle 2\pi(I=0)|H_W|K_L\rangle &= \Big[\epsilon(a_0+a_0^*)+(a_0-a_0^*)\Big]\exp(i\delta_0)\\
\langle 2\pi(I=2)|H_W|K_S\rangle &= \Big[\epsilon(a_2-a_2^*)+(a_2+a_2^*)\Big]\exp(i\delta_2)\\
\langle 2\pi(I=2)|H_W|K_L\rangle &= \Big[\epsilon(a_2+a_2^*)+(a_2-a_2^*)\Big]\exp(i\delta_2)
\end{aligned}\tag{73}$$

d'où les rapports:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= \frac{\langle 2\pi(I=0)|H_W|K_L\rangle}{\langle 2\pi(I=0)|H_W|K_S\rangle}=\frac{\epsilon\mathcal{R}e(a_0)+i\mathcal{I}m(a_0)}{\mathcal{R}e(a_0)+i\epsilon\mathcal{I}m(a_0)}\\
\epsilon_2 &= \frac{\langle 2\pi(I=2)|H_W|K_L\rangle}{\langle 2\pi(I=0)|H_W|K_S\rangle}=\frac{\epsilon\mathcal{R}e(a_2)+i\mathcal{I}m(a_2)}{\mathcal{R}e(a_0)+i\epsilon\mathcal{I}m(a_0)}\exp i(\delta_2-\delta_0)\\
\omega &= \frac{\langle 2\pi(I=2)|H_W|K_S\rangle}{\langle 2\pi(I=0)|H_W|K_S\rangle}=\frac{\mathcal{R}e(a_2)+i\epsilon\mathcal{I}m(a_2)}{\mathcal{R}e(a_0)+i\epsilon\mathcal{I}m(a_0)}\exp i(\delta_2-\delta_0)
\end{aligned}\tag{74}$$

Et avec les particules réellement observées:

$$\begin{aligned}
|\pi^+\pi^-(SYM)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^+\pi^-\rangle+|\pi^-\pi^+\rangle\Big)=\sqrt{\frac{1}{3}}\;|2\;0\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\;|0\;0\rangle\\
|\pi^0\pi^0(SYM)\rangle &= |\pi^0\pi^0\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\;|2\;0\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\;|0\;0\rangle
\end{aligned}\tag{75}$$

On trouve:

$$\begin{aligned}
\eta_{+-} &= \frac{\langle\pi^+\pi^-(SYM)|H_W|K_L\rangle}{\langle\pi^+\pi^-(SYM)|H_W|K_S\rangle}=\epsilon_0+\frac{\epsilon'}{1+\omega/\sqrt{2}}\\
\eta_{00} &= \frac{\langle\pi^0\pi^0(SYM)|H_W|K_L\rangle}{\langle\pi^0\pi^0(SYM)|H_W|K_S\rangle}=\epsilon_0-2\frac{\epsilon'}{1-\omega\sqrt{2}}
\end{aligned}\tag{76}$$

avec:

$$\epsilon'=\frac{1}{2}(\epsilon_2-\epsilon_0\omega)\tag{77}$$

Expérimentalement on a:

$$\omega\approx\frac{1}{22}<1\tag{78}$$

ce qui est en accord avec la règle de sélection $\Delta I=1/2$ (voir l'appendice 2).
On a la relation:

$$\epsilon_0=\frac{\epsilon+i\tan\theta_0}{1+i\epsilon\tan\theta_0}\tag{79}$$

avec:

$$\tan\theta_0 = \frac{\mathcal{I}m(a_0)}{\mathcal{R}e(a_0)} \tag{80}$$

ou encore:

$$\theta_0 = \ \text{Arg}\ a_0 \tag{81}$$

On adoptera la convention de phase:

$$\theta_0 = 0 \tag{82}$$

ce qui revient à choisir a_0 réel. On a alors:

$$\epsilon_0 = \epsilon \tag{83}$$

Quant à ϵ':

$$\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 - \epsilon_0\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i(1-\epsilon^2)\Bigg(\mathcal{R}e(a_0)\mathcal{I}m(a_2) - \mathcal{I}m(a_0)\mathcal{R}e(a_2)\Bigg)}{\Bigg(\mathcal{R}e(a_0) + i\epsilon\mathcal{I}m(a_0)\Bigg)^2} \exp[i(\delta_2 - \delta_0)] \tag{84}$$

et avec la convention de phase et l'approximation $\epsilon^2 << 1$:

$$\epsilon' = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{I}m(a_2)}{a_0} \exp[i(\delta_2 - \delta_0)] \tag{85}$$

On voit que ce type de violation de CP est lié à une différence de phase entre δ_2 et δ_0.

7 La violation directe de CP existe-t-elle?

On peut répondre à cette question si l'on est capable de mesurer le rapport ϵ'/ϵ.
On a à sa disposition les quantités mesurables expérimentalement:

$$|\eta_{+-}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \to \pi^+\pi^-)} = |\epsilon + \epsilon'|^2 \tag{86}$$

$$|\eta_{00}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_S \to \pi^0\pi^0)} = |\epsilon - 2\epsilon'|^2 \tag{87}$$

Le rapport de ces deux quantités peut s'écrire de deux façons:

$$R = \frac{|\eta_{+-}|^2}{|\eta_{00}|^2} = \frac{\Gamma(K_L \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \to \pi^+\pi^-)}\,\frac{\Gamma(K_S \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_L \to \pi^0\pi^0)} \tag{88}$$

ou:

$$R = \frac{|\eta_{+-}|^2}{|\eta_{00}|^2} = \frac{\Gamma(K_L \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_L \to \pi^0\pi^0)}\,\frac{\Gamma(K_S \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_S \to \pi^+\pi^-)} \tag{89}$$

On peut donc concevoir deux types d'expériences:

- Dans la même expérience on utilise deux faisceaux de K_S et K_L et on compare la production de pions chargés à celle de pions neutres.
- On fait deux expériences différentes avec des faisceaux de K_S et de K_L et on compare pour chacun la production de pions chargés à celle de pions neutres.

Ensuite, on a:

$$R = \left|\frac{\epsilon + \epsilon'}{\epsilon - 2\epsilon'}\right|^2 \approx \left|1 + 3\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right|^2 \approx 1 + 6\mathcal{R}e\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) \tag{90}$$

8 Appendice 1: les états d'isospin du système de deux pions

Pour décrire ce système on dispose de deux bases. Celle des isospins des deux pions: les états sont alors des états propres des opérateurs T_1^2, T_{1z}, T_2^2 et T_{2z}. La base de l'isospin total $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$: les états sont alors les états propres des opérateurs T_1^2, T_2^2, T^2 et T_z.

Les vecteurs propres de la première base sont les suivants:

$$\begin{array}{ccc} |+\,+\rangle & |+\,0\rangle & |+\,-\rangle \\ |0\,+\rangle & |0\;0\rangle & |0\,-\rangle \\ |-\,+\rangle & |-\,0\rangle & |-\,-\rangle \end{array}$$

Avec cette notation, le vecteur $|+\,-\rangle$ est état propre de T_{1z} et T_{2z} avec les valeurs propres $+1$ et -1, respectivement, et ainsi de suite pour les autres vecteurs propres. Tous les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de T_1^2 et T_2^2 avec des valeurs propres $1(1+1) = 2$.

Les vecteurs propres de la deuxième base sont les suivants:

$$\begin{array}{ccccc} |2\;2\rangle & |2\;1\rangle & |2\;0\rangle & |2-1\rangle & |2-2\rangle \\ & |1\;1\rangle & |1\;0\rangle & |1-1\rangle & \\ & & |0\;0\rangle & & \end{array}$$

Avec cette notation le vecteur $|21\rangle$ est état propre de T^2 avec la valeur propre $2(2+1) = 6$ et de T_z avec la valeur propre 1. Tous les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de T_1^2 et T_2^2 avec des valeurs propres $1(1+1) = 2$.

On passe d'une base à l'autre en utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan ou encore en utilisant la méthode suivante.
On utilisera les relations:

$$T^2 = (\vec{T}_1 + \vec{T}_2)^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 = T_1^2 + T_2^2 + T_{1+}T_{2-} + T_{1-}T_{2+} + 2T_{1z}T_{2z} \tag{91}$$

$$T_z = T_{1z} + T_{2z} \tag{92}$$

avec les définitions:

$$\begin{aligned} T_{1+} &= T_{1x} + iT_{1y} \\ T_{1-} &= T_{1x} - iT_{1y} \end{aligned} \tag{93}$$

et de même pour T_{1+} et T_{1-}.
On peut vérifier que le vecteur $|++\rangle$ (qui appartient à la première base) est aussi un vecteur propre de la deuxième base:

$$T^2|++\rangle = (T_1^2 + T_2^2 + T_{1+}T_{2-} + T_{1-}T_{2+} + 2T_{1z}T_{2z})|++\rangle$$

$$= [1(1+1) + 1(1+1) + 0 + 0 + 2(+1)(+1)]|++\rangle = 6|++\rangle \tag{94}$$

avec la valeur propre $+6$.
On peut donc identifier le vecteur $|++\rangle$ avec le vecteur $|2\ 2\rangle$ (à une phase près). On peut choisir cette phase telle que:

$$|2\ 2\rangle = |++\rangle \tag{95}$$

Ensuite, on applique l'opérateur $T_- = T_{1-} + T_{2-}$:

$$T_-|2\ 2\rangle = (T_{1-} + T_{2-})|++\rangle \tag{96}$$

$$\sqrt{2(2+1) - 2(2-1)}\ |2\ 1\rangle = \sqrt{1(1+1)}\ |0+\rangle + \sqrt{1(1+1)}\ |+0\rangle \tag{97}$$

ce qui donne:

$$|2\ 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0+\rangle + |+0\rangle\Big) \tag{98}$$

On continue:

$$T_-|2\ 1\rangle = (T_{1-} + T_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0+\rangle + |+0\rangle\Big) \tag{99}$$

$$\sqrt{2(2+1)-1(1-1)}\ |2\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Big(|-+\rangle + |0\ 0\rangle + |0\ 0\rangle + |+-\rangle\Big) \tag{100}$$

d'où:

$$|2\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|-+\rangle + 2|0\ 0\rangle + |+-\rangle\Big) \tag{101}$$

$$T_-|2\ 0\rangle = (T_{1-}+T_{2-})\frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|-+\rangle + 2|0\ 0\rangle + |+-\rangle\Big) \tag{102}$$

$$\sqrt{2(2+1)-0(0-1)}\ |2-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2}\Big(|-0\rangle + 2|-0\rangle + 2|0\ -\rangle + |0\ -\rangle\Big) \tag{103}$$

d'où:

$$|2-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|-0\rangle + |0\ -\rangle\Big) \tag{104}$$

et finalement:

$$T_-|2-1\rangle = (T_{1-}+T_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|-0\rangle + |0\ -\rangle\Big) \tag{105}$$

$$\sqrt{2(2+1)+1(-1-1)}\ |2-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Big(|--\rangle + |--\rangle\Big) \tag{106}$$

d'où:

$$|2-2\rangle = |--\rangle \tag{107}$$

On va maintenant obtenir les vecteurs propres correspondant à $T = 1$. Le vecteur $|1\ 1\rangle$ est formé à partir des mêmes vecteurs que le vecteur $|2\ 1\rangle$ et il lui est orthogonal (suivant un théorème de la mécanique quantique). Cette propriété d'orthogonalité ne définit pas le vecteur $|1\ 1\rangle$ de façon unique, mais seulement à une phase près si les deux vecteurs sont normés à l'unité. On peut choisir la phase arbitrairement et écrire:

$$|1\ 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\ 0+\rangle - |+0\rangle\Big) \tag{108}$$

On applique ensuite l'opérateur T_-:

$$T_-|1\ 1\rangle = (T_{1-}+T_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\ +\rangle - |+0\rangle\Big) \tag{109}$$

$$\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\;|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Big(|-+\rangle + |0\;0\rangle - |0\;0\rangle - |+-\rangle\Big) \tag{110}$$

d'où:

$$|1\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|-+\rangle - |+-\rangle\Big) \tag{111}$$

et finalement:

$$T_-|1\;0\rangle = (T_{1-} + T_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|-+\rangle - |+-\rangle\Big) \tag{112}$$

$$\sqrt{1(1+1)-0(0-1)}|1-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\Big(|-0\rangle - |0\;-\rangle\Big) \tag{113}$$

d'où:

$$|1-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|-0\rangle - |0\;-\rangle\Big) \tag{114}$$

Le vecteur $|0\;0\rangle$ est formé des mêmes vecteurs que $|2\;0\rangle$ et $|1\;0\rangle$ et leur est orthogonal. Les composantes du nouveau vecteur sont obtenues en faisant le produit vectoriel:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \tag{115}$$

Donc, avec un choix de phase arbitraire:

$$|0\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|+-\rangle - |0\;0\rangle + |-+\rangle\Big) \tag{116}$$

9 Appendice 2: la règle de sélection $\Delta I = 1/2$

On rappelle la formule de Gell-Mann et Nishijima:

$$Q = I_z + \frac{Y}{2} = I_z + \frac{B+S}{2} \tag{117}$$

On sait que la charge électrique Q est strictement conservée, et que le nombre baryonique l'est aussi avec une grande précision, mais que l'étrangeté est violée par les interactions faibles. Il en résulte une violation de l'isospin:

$$\Delta Q = 0 = \Delta I_z + \frac{\Delta S}{2} \tag{118}$$

Par exemple, si $|\Delta S| = 1$ on aura $|\Delta I_z| = 1/2$.

Considérons des transitions avec $|\Delta S| = 1$:

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\rightarrow p\,\pi^- \\ \Lambda^0 &\rightarrow n\,\pi^0 \end{aligned} \tag{119}$$

On a pour les états d'isospin du système pion-nucléon:

$$\begin{aligned} |3/2+3/2\rangle &= |\pi^+ p\rangle \\ |3/2+1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^+ n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^0 p\rangle \\ |3/2-1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^0 n\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^- p\rangle \\ |3/2-3/2\rangle &= |\pi^- n\rangle \end{aligned} \tag{120}$$

et

$$\begin{aligned} |1/2+1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^0 p\rangle \\ |1/2-1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^0 n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^- p\rangle \end{aligned} \tag{121}$$

et inversement:

$$\begin{aligned} |\pi^- p\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|3/2-1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1/2-1/2\rangle \\ |\pi^0 n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|3/2-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1/2-1/2\rangle \end{aligned} \tag{122}$$

Pour calculer les amplitudes de désintégration on utilisera l'astuce du "spurion". Le spurion est une particule fictive qui permet de rétablir la conservation de l'isospin. On aura pour les deux désintégrations du Λ^0:

$$\Lambda^0\ Sp \rightarrow \pi^-\ p \tag{123}$$

$$\Lambda^0\ Sp \rightarrow \pi^0\ n \tag{124}$$

On conservera l'isospin avec un spurion d'isospin 1/2 (Table 2), ou avec un spurion d'isospin 3/2 (Table 3).
Le système $\Lambda^0\ Sp$ se trouve dans l'état d'isospin:

$$|\Lambda^0\ Sp\rangle = \alpha\ |\Lambda^0\ Sp(1/2)\rangle + \beta\ |\Lambda^0\ Sp(3/2)\rangle = \alpha\ |1/2\ \ -1/2\rangle + \beta\ |3/2\ \ -1/2\rangle \tag{125}$$

D'où les amplitudes:

$$\langle\pi^-\ p|\Lambda^0\ Sp\rangle = -\alpha\sqrt{\frac{2}{3}} + \beta\sqrt{\frac{1}{3}} \tag{126}$$

	Λ^0	Sp	π^-	p	$\pi^-\ p$
I	0	1/2	1	1/2	1/2
I_z	0	−1/2	−1	+1/2	−1/2
	Λ^0	Sp	π^0	n	$\pi^0\ n$
I	0	1/2	1	1/2	1/2
I_z	0	−1/2	0	−1/2	−1/2

Table 2: Avec un spurion d'isospin 1/2.

	Λ^0	Sp	π^-	p	$\pi^-\ p$
I	0	1/2	1	3/2	3/2
I_z	0	−1/2	−1	+1/2	−1/2
	Λ^0	Sp	π^0	n	$\pi^0\ n$
I	0	1/2	1	3/2	3/2
I_z	0	−1/2	0	−1/2	−1/2

Table 3: Avec un spurion d'isospin 3/2.

$$\langle \pi^0\ n | \Lambda^0\ Sp \rangle = \alpha \sqrt{\frac{1}{3}} + \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{127}$$

Le rapport des probabilités pour les deux modes de désintégration est:

$$R = \frac{\Gamma(\Lambda^0 \to \pi^-\ p)}{\Gamma(\Lambda^0 \to \pi^0\ n)} = \left| \frac{\beta - \alpha\sqrt{2}}{\beta\sqrt{2} + \alpha} \right|^2 \tag{128}$$

Deux cas particuliers sont présentés dans la Table 4.

	ΔI	R
$\beta = 0$	1/2	2
$\alpha = 0$	3/2	1/2

Table 4: Cas particuliers $\Delta I = 1/2$ et $\Delta I = 3/2$.

L'expérience donne $R = 2.186$, ce qui est en faveur de la prépondérance de $\Delta I = 1/2$, sans toutefois exclure une petite contribution de $\Delta I = 3/2$.
Considérons maintenant les désintégrations:

$$\begin{aligned} K^0(\overline{K}^0) &\to \pi^+\pi^- \\ K^0(\overline{K}^0) &\to \pi^0\pi^0 \end{aligned} \tag{129}$$

Avec l'astuce du spurion:

$$K^0(\overline{K}^0) \quad Sp \quad \rightarrow \pi^+ \, \pi^- \tag{130}$$
$$K^0(\overline{K}^0) \quad Sp \quad \rightarrow \pi^0 \, \pi^0 \tag{131}$$

On conservera l'isospin avec un spurion d'isospin 1/2 (Table 5), ou avec un spurion d'isospin 3/2 (Table 6).

	$K^0(\overline{K}^0)$	Sp	π^+	π^-
I	$1/2$	$1/2$	1	1
I_z	$\pm1/2$	$\mp1/2$	$+1$	-1
	$K^0(\overline{K}^0)$	Sp	π^0	π^0
I	$1/2$	$1/2$	1	1
I_z	$\pm1/2$	$\mp1/2$	0	$-1/2$

Table 5: Avec un spurion d'isospin 1/2.

	$K^0(\overline{K}^0)$	Sp	π^+	π^-
I	$1/2$	$3/2$	1	1
I_z	$\pm1/2$	$\mp1/2$	$+1$	-1
	$K^0(\overline{K}^0)$	Sp	π^0	π^0
I	$1/2$	$3/2$	1	1
I_z	$\pm1/2$	$\mp1/2$	0	$-1/2$

Table 6: Avec un spurion d'isospin 3/2.