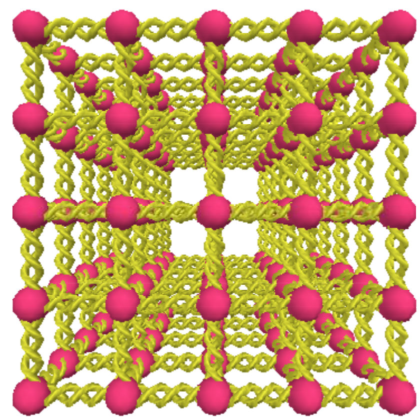
PHY2215 - HIVER 2009

Devoir #1 – Multiplicité
(À rendre au cours du 20 janvier, compte pour 5 points)

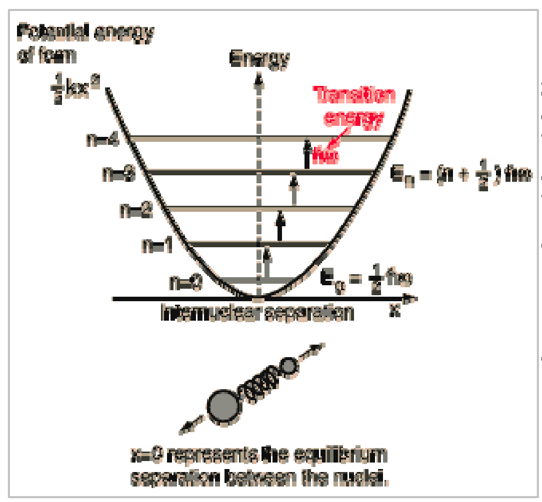
1. (2 points) Considérant que nous sommes un groupe de 14 personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes dans le groupe aient la même date d'anniversaire? Combien faudrait-il que nous soyons pour qu'il y ait moins de 1% de chances que nous ayons tous des dates d'anniversaire différentes? On négligera le 29 février dans les calculs.

2. Le modèle d'Einstein d'un solide

Considérons que dans un solide, chaque atome de masse *m* possède un lien avec ses voisins dont la force est proportionnelle à la distance, i.e. les atomes sont liés comme par un "ressort" de constante *k*. On considère une symétrie cubique, c'est-à-dire que chaque atome possède deux voisins (et deux demi-liens) selon chaque direction de l'espace. (On ne tient pas compte du fait que certains atomes occupent des sites près des bords: tous les atomes ont 6 voisins.)


Source: kineticskit.sourceforge.net/

Chaque atome se situe donc dans un potentiel harmonique dont l'énergie est donnée par $kx^2/2$ où x est la déviation de la position de l'atome par rapport à sa position d'équilibre selon cet axe. La solution de l'équation de Schrödinger pour ce potentiel n'admet que des niveaux d'énergie discrets $E = (n+1/2)h\nu$, où h est la constante de Planck, $\nu = \sqrt{k/m}\big/2\pi$ est la fréquence d'oscillation et $n = 0, 1, 2, 3\ldots$



Source: hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/hosc.html

a) (1 point) Montrez que pour un solide d'Einstein constitué de N atomes et excité par n quanta d'énergie, le nombre d'états accessible est donné par

$$\Omega(N,n) = \frac{(n+3N-1)!}{n!(3N-1)!} \qquad (1)$$

b) (1 point) Utilisez l'approximation de Stirling pour montrer que

$$\Omega(N,n) = \frac{\left(\frac{n+3N}{n}\right)^n \left(\frac{n+3N}{3N}\right)^{3N}}{\sqrt{2\pi n(n+3N)/3N}} \qquad (2)$$

c) (1 point) Considérant des solides constitués de 8 et 125 atomes, calculez avec l'éq. (1) le nombre d'états pour des nombres de quanta $n = 0, 1, 2, 5, 10, 20$ et 50. Comparez avec l'approximation (éq. 2).