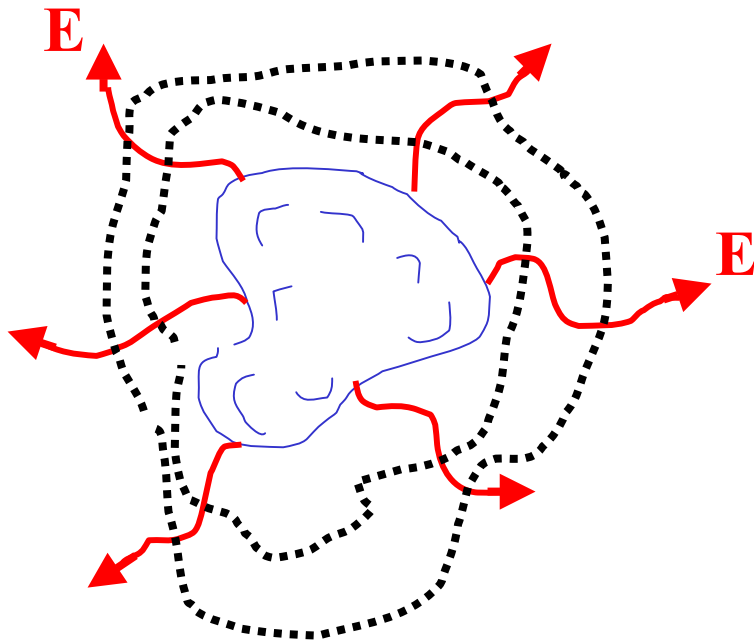


Amuse-gueules

1) A quoi correspondent les lignes en pointillés?

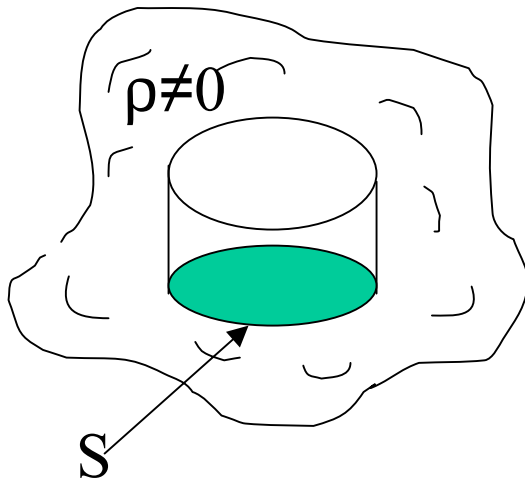


Surfaces équipotentiellles,
normales à $\vec{E}$

Amuse-gueules (suite)

2) $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$?

manque de symétrie: $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$

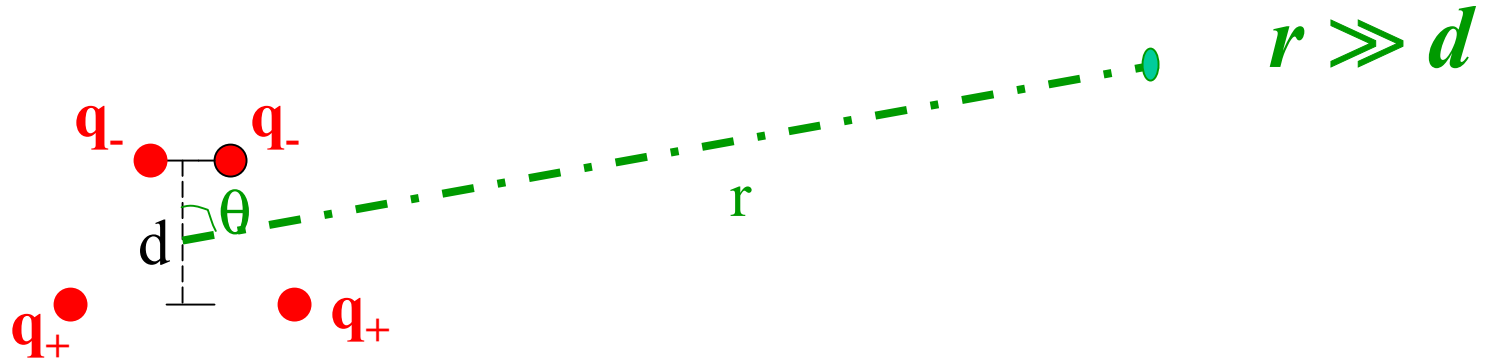


$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = ?$$

$$= 0 \text{ car } Q_{\text{int}} = 0$$

Amuse-gueules (suite)

3)



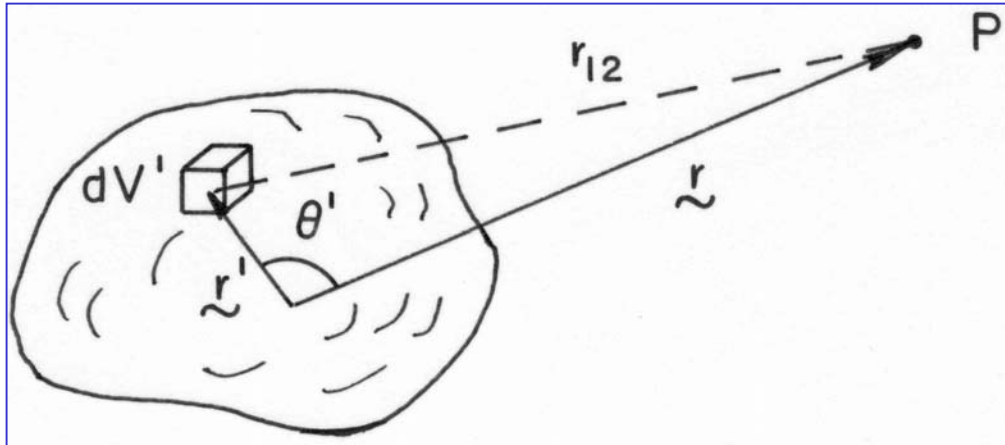
$$\varphi = 0 ?$$

$$\varphi \propto \frac{\cos \theta}{r^2} ?$$

φ : potentiel d'un dipôle

Amuse-gueules (suite)

4)



$$r \gg r'$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \dots ??$$

vrai:

$$\varphi_{\text{monopole}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad \varphi_{\text{dipôle}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Chapitre 3: Energie électrostatique & conducteurs

3.1 Introduction:

En mécanique, une des lois les plus importantes:
principe de conservation d'énergie

Avec expressions pour énergie cinétique & potentielle, possible de trouver relations entre états d'un système à 2 temps différents, sans avoir à se préoccuper de ce qui s'est passé entre ces 2 temps

En électromagnétisme, principe de conservation d'énergie aussi utile pour découvrir des phénomènes intéressants



énergie des systèmes électrostatiques

3.2 Energie électrostatique d'une distribution de charges ponctuelles

Relation pour l'énergie d'interaction potentielle très simple; déjà discutée lors du potentiel électrique

Soient 2 charges q_1 & q_2 , séparées par distance r_{12}

énergie emmagasinée dans système car travail a été fait pour emmener charges ensemble. Principe de conservation d'énergie :

Energie emmagasinée = Travail effectué

Travail requis pour apporter unité de charge +ve, au point (1), à distance r_{12} d'une charge q_2 : ??

$$W(\text{unité}) \equiv \varphi(1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

$$W(\text{unité}) \equiv \varphi(1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Travail requis pour apporter charge q_1 à cette même distance de q_2 , et donc l'énergie d'interaction électrostatique U des 2 charges q_1 & q_2 : ?

$$U = q_1 \varphi(1)$$

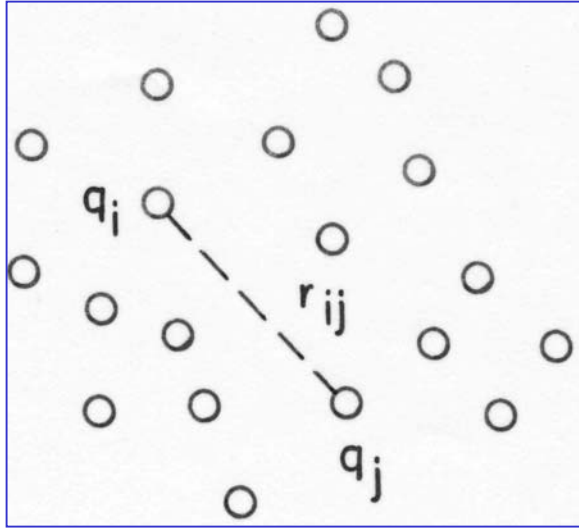
$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Principe de superposition: force totale sur toute charge =
somme des forces dues à toutes les autres charges

L'énergie = travail fait contre une force $\Rightarrow$ énergie totale ??



énergie totale d'un système de charges = somme des énergies d'interaction de chaque paire de charges



q_i & q_j : paire quelconque de charges,
séparées par distance r_{ij}

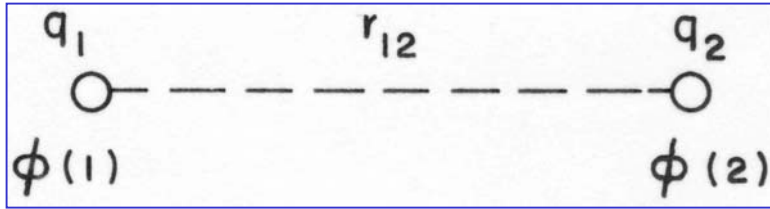
Energie de cette paire:

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Energie électrostatique totale =
somme des énergies de toutes les paires possibles de charges:

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Si pas possible d'identifier chaque paire de charges,
comptage double e.g.:



2 charges q_1 & q_2 , séparées
par distance r_{12}

Energie d'interaction mutuelle est:

charge au point (1) fois potentiel au point (1) dû à q_2 :

$$U = q_1 \phi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

ou charge au point (2) fois potentiel au point (2) dû à q_1 :

$$U = q_2 \phi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ainsi, si charges non-identifiées, énergie calculée 2X énergie réelle

Donc, en général, l'énergie totale
d'une distribution de charges ponctuelles:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

ou

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

c.a.d. ??

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi(r_i)$$

$\varphi(\mathbf{r}_i)$: potentiel au point $\mathbf{r}_i$, position de charge q_i ,
dû à toutes les autres charges

3.3 Energie électrostatique d'une distribution continue de charges

Distribution continue de charges:

chaque élément de volume contient élément de charge ρdV

alors $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi(r_i)$  ??

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

Forme différente:

1^{ère} éq. de Maxwell: $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$

Mais (ex. 1.14a), $\varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \varphi)$

d'où $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) dV$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) dV$$

Théorème de divergence:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) dV = ?? = \int_S \varphi \vec{E} \cdot \hat{n} da$$

et $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

$$\longrightarrow U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_S \varphi \vec{E} \cdot \hat{n} da$$

normalement, intégrales évaluées où se trouvent charges

mathématiquement, U simplifiée quand intégrons sur tout l'espace

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_S \phi \vec{E} \cdot \hat{n} da$$

Physiquement, rien n'est changé car $\mathbf{q} = 0$ en dehors de V $\int_V \rho \phi dV$

Surface S e.g. sphérique, de rayon R , enveloppe région infinie

Sur cette surface: $E \propto 1/R^2$, $\phi \propto 1/R$ et surface $\propto R^2$

$$\longrightarrow \int_S \propto \left(1/R\right) \left(1/R^2\right) (R^2) \propto 1/R$$

Intégrant sur tout l'espace: $R \rightarrow \infty$ et $\int_S \rightarrow 0$

Ainsi,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{tout l'espace}} E^2 dV$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{tout} \\ \text{l'espace}}} E^2 dV$$

➡ énergie localisée dans l'espace où se trouve $\vec{E}$

raisonable: ondes de lumière et de radio se propagent dans l'espace, transportant leurs énergies avec elles

mais, pas de charges dans les ondes ➡ énergie localisée
où se trouve $\vec{E}$ et non pas où se trouvent charges produisant $\vec{E}$

➡ En présence de $\vec{E}$, nous avons dans l'espace énergie de densité (énergie par unité de volume) :

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

Chaque élément de volume, dans région où $\vec{E} \neq \mathbf{0}$,
contient l'énergie: $\frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV$

Raison importante qui requiert de déterminer où se trouve U:

théorie de gravitation: toute masse est source d'attraction

$U = mc^2$, masse et énergie sont équivalentes



toute énergie est source de force gravitationnelle

Pour localiser toute la masse, il faut localiser toute l'énergie

3.4 Energie électrostatique d'une couche sphérique chargée

Couche sphérique, uniformément chargée,
de charge totale q et de rayon R

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi(r_i) \quad \longrightarrow \quad U = ??$$

$$U = \frac{1}{2} \int_s \sigma \varphi da$$

Potentiel à la surface de la sphère: ??

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$\longrightarrow \quad U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma da = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

Autre façon:
$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{tout} \\ \text{l'espace}}} E^2 dV$$

$r < R, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad r > R, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad \text{donc} \quad E^2 = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^4}$

Ainsi,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{q^2}{r^4} (r^2 \sin \theta d\theta d\phi) dr$$

$$U = \frac{4\pi q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

et de nouveau:

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

Exercices disponibles: 3.1 à 3.9 inclus, 3.24