PHY6650A
Devoir #1
À remettre avant 20h le lundi 21 sept.

Une fois le devoir terminé, numérisez votre solution d'une certaine façon. Il est votre responsabilité de vous assurer que le document numérisé est lisible. Envoyez-moi vos devoirs numérisés par courriel (london@lps.umontreal.ca).

1. Le moment angulaire est décrit par le groupe $SU(2)$. Pour $j = \frac{1}{2}$, les générateurs 2×2 sont proportionnels aux matrices de Pauli. Trouvez les générateurs 3×3 pour $j = 1$. Ce sont les $\{J_i\}$.

Remarque: Si on a trois matrices G_i qui satisfont aux relations de commutation $[G_i, G_j] = i\epsilon_{ijk} G_k$, on peut faire une transformation unitaire $G_i \to G'_i = U G_i U^\dagger$ et les nouvelles matrices vont aussi satisfaire aux mêmes relations de commutation $[G'_i, G'_j] = i\epsilon_{ijk} G'_k$. Les représentations $\{G_i\}$ et $\{G'_i\}$ sont équivalentes et la transformation unitaire est une transformation de similarité.

Les algèbres $su(2)$ et $so(3)$ sont isomorphes. Les générateurs de $SO(3)$ sont les $\{J'_i\}$:

$$J'_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J'_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J'_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Trouvez la matrice unitaire U qui relie les $\{J_i\}$ et $\{J'_i\}$.

2. Matrices de Pauli: démontrez que

1. $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$,
2. $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\, I + i\epsilon_{ijk}\, \sigma_k$,
3. $e^{i\vec{A}\cdot\vec{\sigma}} = (\cos A)\, I + i(\sin A)\hat{A} \cdot \vec{\sigma}$, où $\vec{A}$ est un 3-vecteur ordinaire et $A = |\vec{A}|$.

3. Matrices γ:

   1. Démontrez les identités suivantes:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \ , \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} \ , \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \ , \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma_\mu &= 2(\gamma^\tau\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\tau) \ ,
\end{aligned}$$

   2. Démontrez que $\not{p}\not{p} = p^2$,

   3. Calculez $\mathrm{Tr}\,[\gamma^\mu\gamma^\nu]$. Indice: utilisez la propriété cyclique de la trace.