PHY6650A
Devoir #3
À remettre au plus tard le lundi 5 oct.

Une fois le devoir terminé, numérisez votre solution d'une certaine façon. Il est votre responsabilité de vous assurer que le document numérisé est lisible. Envoyez-moi vos devoirs numérisés par courriel (london@lps.umontreal.ca).

On considère la théorie quantique d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon. L'action de cette théorie s'écrit

$$S = \int d^4x \, \left(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi\right) .$$

Il est plus facile d'analyser cette théorie à l'aide des variables dynamiques $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ qu'à l'aide des parties réelles et imaginaires de $\phi(x)$.

(a) Montrez que $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ satisfont à l'équation de Klein-Gordon.

(b) Trouvez les impulsions conjugées à $\phi(x)$ et à $\phi^*(x)$. Montrez que l'hamiltonien s'écrit

$$H = \int d^3x \, \left(\pi^* \pi + \vec{\nabla}\phi^* \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2 \phi^* \phi\right) .$$

(c) On introduit deux types d'opérateurs de création et d'annihilation, $a_{\vec{p}}^{(\dagger)}$ et $b_{\vec{p}}^{(\dagger)}$. On écrit

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right) .$$

(i) Montrez que, si

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \ ,$$

avec tous les autres commutateurs $= 0$, ça implique que

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \qquad \text{et} \qquad [\phi^*(\vec{x}), \pi^*(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \ .$$

(ii) Montrez que H peut être diagonalisé.
(iii) Montrez que la théorie contient deux particules de masse m.

(d) Le lagrangien est invariant sous la transformation $\phi \to e^{i\alpha}\phi$. Cette symétrie donne lieu au courant conservé

$$j^\mu = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi \ ,$$

où $X\overleftrightarrow{\partial^\mu}Y \equiv X\partial^\mu Y - (\partial^\mu X)Y$. Réécrivez la charge conservée

$$Q = \int d^3x \, j^0$$

en terme des opérateurs de création et d'annihilation et calculer la charge des deux particules.